

1. Ga na of de volgende reeksen convergeren. Vermeld in geval van convergentie of de reeks absoluut convergent of relatief convergent is.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 2}{n^4 - \sqrt{n} + 3}.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}.$

2. Gegeven zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ met $a_n > 0$ en $b_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Ga na of onderstaande beweringen juist of onjuist zijn. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

a) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert én $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert, dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ook.

b) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert én $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergeert, dan divergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ook.

3. De functierij $\{f_n(x)\}$ is op het interval $[0, 1]$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{1 + 2x^n}{2 + x^n}, n \geq 1.$$

- a) Toon aan dat $\{f_n(x)\}$ uniform convergeert op het interval $[0, b]$ voor iedere $0 < b < 1$.
- b) Ga na of $\{f_n(x)\}$ uniform convergent is op $[0, 1]$.
4. Toon aan dat onderstaande reeks uniform convergeert op $[-a, a]$ voor iedere reële $a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}.$$

5. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \sqrt{n}}.$$

Bepaal het convergentie-interval van deze machtreeks.

Z.O.Z.

6. De Taylorreeks van de functie $f(x) = \frac{x}{2-x^2}$ rond $x = 0$ is gegeven door

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Bepaal a_n voor alle $n \geq 0$ en geef aan voor welke x de reeks convergeert naar $f(x)$.

7. Laat $G \subset \mathbb{R}^n$ een niet-lege gesloten verzameling zijn. Ga na of de volgende beweringen waar zijn. Als de bewering waar is, geef dan een verklaring/bewijs. Als de bewering niet waar is, geef dan een tegenvoorbeeld.

- (i) Als $\mathbf{p} \in G$, dan is $\mathbf{p}$ verdichtingspunt (limietpunt) van G .
- (ii) Als $\mathbf{p}$ een randpunt is van G^c , dan is $\mathbf{p} \in G$.
- (iii) Er bestaat een niet-lege deelverzameling H van G die open is.

8. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Toon aan dat f continu is in $(x, y) = (0, 0)$.

Normering:

1 : 5	2 : 4	3 : a) 4 b) 2	4 : 4	5 : 4	6 : 4	7 : 5	8 : 4
_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____	_____
5	4	6	4	4	4	5	4

$$\text{Eindcijfer} = \frac{\# \text{ punten}}{4} + 1$$