

1. De kritische punten worden gegeven door de vergelijking $Df(x, y) = 0$. In ons geval,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 - y^2) - 16x \\ -4y(x^2 - y^2) - 16y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dan,

$$\begin{aligned} x(x^2 - y^2 - 4) = 0 &\Leftrightarrow x(x^2 - y^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x^2 = y^2 + 4 \\ -y(x^2 - y^2 + 4) = 0 &\Leftrightarrow -y(x^2 - y^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ of } y^2 = x^2 + 4. \end{aligned}$$

Dus, als $x = 0$, moet $y = 0$ of $y^2 = 4$ zijn. Als $y = 0$, moet $x = 0$ of $x^2 = 4$ zijn. Dan, zijn er vijf kritische punten: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ en $(0, -2)$.

Om de aard van de punten te weten, hebben we de Hessian nodig.

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4y^2 - 16 & -8xy \\ -8xy & -4x^2 + 12y^2 - 16 \end{pmatrix}.$$

– $(0, 0)$:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = A$$

We hebben $\det(A_1) = -16 < 0$ en $\det(A_2) = (-16)^2 > 0$. Dus, $H(0, 0)$ is negatief definitief en f heeft een relatief maximum op $(0, 0)$.

– $(2, 0)$ en $(-2, 0)$:

$$H(-2, 0) = H(2, 0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} = A.$$

We hebben $\det(A_1) = 32 > 0$ en $\det(A_2) = -32^2 < 0$. Dus, $H(2, 0)$ (en $H(-2, 0)$) is indefinitief en f heeft een zadelpunt op $(2, 0)$ en op $(-2, 0)$.

– $(0, 2)$ en $(0, -2)$:

$$H(0, -2) = H(0, 2) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = A.$$

We hebben $\det(A_1) = -32 < 0$ en $\det(A_2) = -32^2 < 0$. Dus, $H(0, 2)$ (en $H(0, -2)$) is indefinitief en f heeft een zadelpunt op $(0, 2)$ en op $(0, -2)$.

2. a) Laat $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^3 + 5$. We willen weten of de vergelijking

$$F(x, y, z) = 0$$

een oplossing voor z in termen van x en y heeft in een omgeving van $(2, -1, 2)$. We weten dat

- F heeft continu afgeleiden,
- $F(2, -1, 2) = 4 - 1 - 8 + 5 = 0$.

- $\frac{\partial F}{\partial z}(2, -1, 2) = -3 \cdot 2^2 = -12 \neq 0$.

Door de impliciet functiestelling, volgt het dat er een omgeving van $(2, -1, 2)$ bestaat waar z in termen van x en y kan worden opgelost.

- b) We hebben $F(x, y, z(x, y)) = 0$ voor alle (x, y) in een omgeving van $(2, -1)$. Dus,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y)) = 2x - 3z^2(x, y) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$$

en

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(2, -1, 2) = 4 - 12 \frac{\partial z}{\partial x}(2, -1).$$

Dus, $\frac{\partial z}{\partial x}(2, -1) = \frac{1}{3}$.

Evenzo,

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y)) = -2y - 3z^2(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

en

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y}(2, -1, 2) = 2 - 12 \frac{\partial z}{\partial y}(2, -1).$$

Dus, $\frac{\partial z}{\partial y}(2, -1) = \frac{1}{6}$.

3. We willen weten voor welke punten is de afbeelding lokaal inverteerbaar. We weten dat f heeft continu afgeleiden. Als $\det(Df(x, y)) \neq 0$, volgt het dat er een omgeving van (x, y) bestaat waar f lokaal inverteerbaar is door de inverse functiestelling. Dus, we bestuderen voor welke punten (x, y) is $\det(Df(x, y)) \neq 0$.

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x - 1 & -2y \\ 2y & 2x + 1 \end{pmatrix} = 4x^2 - 1 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Dus, de afbeelding is lokaal inverteerbaar voor alle punten (x, y) die niet in de cirkel met middelpunt $(0, 0)$ en straal $\frac{1}{2}$ zitten.

4. Zij $f(x, y, z) = (x + y, z - x, 2x(x + y - z) + y^2 + z^2 + 1)$. Door een stelling, weten we dat de verzameling van functies is functioneel afhankelijk als en slechts als $\det(Df(x, y, z)) = 0$ voor alle (x, y, z) . We hebben

$$\begin{aligned} \det(Df(x, y, z)) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4x + 2y - 2z & 2x + 2y & -2x + 2z \end{pmatrix} \\ &= 4x + 2y - 2z - (2x + 2y) + (-2x + 2z) = 0 \end{aligned}$$

Dus, de functies zijn afhankelijk.

Om de afhankelijk te bepalen, beschouwen we de deelmatrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ die determinant niet gelijk aan nul heeft. We schrijven x en y als functies van u , v , en z :

$$\begin{array}{l|l} u = x + y & y = u - z + v \\ v = z - x & x = z - v \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

We substitueren $x = z - v$ en $y = u - z + v$ bij w

$$\begin{aligned} w &= 2x(x + y - z) + y^2 + z^2 + 1 = 2(z - v)(z - v + u - z + v - z) + (u - z + v)^2 + z^2 + 1 \\ &= 2(z - v)(u - z) + (u - z)^2 + 2v(u - z) + v^2 + z^2 + 1 \\ &= 2z(u - z) + u^2 - 2uz + 2z^2 + v^2 + 1 = u^2 + v^2 + 1. \end{aligned}$$

5. We schrijven G als

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ and } x \leq y \leq 2 - x\}.$$

Dan,

$$\begin{aligned} \int \int_G e^{x+y} dA &= \int_0^1 \int_x^{2-x} e^x e^y dy dx = \int_0^1 e^x [e^y]_x^{2-x} dx = \int_0^1 (e^2 - e^{2x}) dx \\ &= \left[xe^2 - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 + 1) \end{aligned}$$

6. De integraal waar we eerst over y en daarna over x integreren is niet makkelijk te bepalen. Dus, we wisselen de volgorde en integreren eerst over x en daarna over y . Dan,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{2x}^2 x^2 e^{y^4} dy \right) dx &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} x^2 e^{y^4} dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}y} e^{y^4} dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{24} y^3 e^{y^4} dy = \int_0^2 \frac{1}{96} (y^4)' e^{y^4} dy = \left[\frac{1}{96} e^{y^4} \right]_0^2 = \frac{1}{96}(e^{16} - 1) \end{aligned}$$

7. We gebruiken de substitutie $u = x^2 - y^2$, $v = x + y$. Dan,

$$dudv = \left| \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| dx dy = 2(x + y) dx dy = 2(x + y) dA,$$

$4 \leq u \leq 9$, en $3 \leq v \leq 5$. Dus,

$$\begin{aligned} \int \int_G (x + y)^2 (x - y) dA &= \int \int_G (x^2 - y^2)(x + y) dA = \int_4^9 \left(\int_3^5 \frac{1}{2} u dv \right) du \\ &= \int_4^9 u du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_4^9 = \frac{65}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad a) \quad \int \int_G e^{-x-y} dA &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m \int_0^m e^{-x} e^{-y} dx dy = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m e^{-y} [-e^{-x}]_0^m dy \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - e^{-m}) \int_0^m e^{-y} dy = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - e^{-m}) [-e^{-y}]_0^m \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - e^{-m})^2 = 1
\end{aligned}$$

b) Poolcoördinaten worden gegeven door $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, en $dx dy = r dr d\theta$. Zij

$$G_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, \frac{1}{m^2} \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Dan,

$$\begin{aligned}
\int \int_G \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dA &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int \int_{G_m} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dA = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^3} r d\theta dr \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^{\sqrt{2}} \int_0^\pi -r \cos^2 \theta (\cos \theta)' d\theta dr = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^{\sqrt{2}} \left[-r \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi dr \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{m}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} r dr = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{r^2}{3} \right]_{\frac{1}{m}}^{\sqrt{2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3m^2} \right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$