

1. a) $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $|w| = \sqrt{3+1} = 2$, $\arg(z) = -\frac{1}{4}\pi$, $\arg(w) = \frac{5}{6}\pi$.
 b) Uit 1a) volgt:

$$z^2 = \left(2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\right)^2 = 8e^{-\frac{1}{2}i\pi} \quad \text{en} \quad w^6 = \left(2e^{\frac{5}{6}i\pi}\right)^6 = 64e^{5i\pi}$$

Dus

$$\frac{z^2}{w^6} = \frac{8e^{-\frac{1}{2}i\pi}}{64e^{5i\pi}} = \frac{1}{8}e^{-\frac{11}{2}i\pi} = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}i\pi}$$

en zo vinden we $r = \frac{1}{8}$ en $\phi = \frac{1}{2}\pi$.

2. Vermenigvuldig teller en noemer met $\bar{z}$ en gebruik dat $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. Gebruik verder dat $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$. Dan vinden we dat

$$\frac{3z}{z^2 + 4z + 1} = \frac{3z\bar{z}}{z^2\bar{z} + 4z\bar{z} + \bar{z}} = \frac{3}{z + 4 + \bar{z}} = \frac{3}{4 + 2\operatorname{Re}(z)} \in \mathbb{R}.$$

Merk nog wel even op dat de noemer nooit nul kan worden, omdat uit $|z| = 1$ volgt dat $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$.

3. Deel de differentiaalvergelijking eerst door $x - 1$:

$$y'(x) + \frac{2}{x-1}y(x) = \frac{6x}{x-1}.$$

Omdat $\int \frac{2}{x-1} dx = 2 \ln(x-1) = \ln(x-1)^2$ is de integrerende factor gelijk aan $e^{\ln(x-1)^2} = (x-1)^2$. De differentiaalvergelijking is dus om te schrijven tot

$$((x-1)^2 y(x))' = 6x(x-1) = 6x^2 - 6x,$$

waaruit volgt dat

$$(x-1)^2 y(x) = 2x^3 - 3x^2 + C, \quad \text{dus dat} \quad y(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + C}{(x-1)^2}.$$

4. Noem $Y(s)$ de Laplace-getransformeerde van $y(x)$. Dan geldt dat

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - 6 \quad \text{en} \quad \mathcal{L}(y'') = s^2 Y(s) - 6s - 5.$$

Bovendien geldt $\mathcal{L}(10) = \frac{10}{s}$. De differentiaalvergelijking wordt dus via Laplace-transformatie omgeschreven tot

$$(s^2 - 2s + 10)Y(s) = 6s - 7 + \frac{10}{s} \quad \text{dus} \quad Y(s) = \frac{6s^2 - 7s + 10}{s(s^2 - 2s + 10)} = \frac{1}{s} + \frac{5(s-1)}{(s-1)^2 + 9}.$$

Die laatste stap volgde via breuksplitsing en kwadraatsplitsen van de noemer. Terugtransformatie (via de tabel) geeft de oplossing van het beginwaardeprobleem: $y(x) = 1 + 5e^x \cos(3x)$.

5. (i) WAAR. Volgens de definitie van open verzameling bestaat er om ieder punt $\mathbf{p}$ van G een open bal met straal r die geheel in G zit. Ieder punt van G is dus een inwendig punt van G .
- (ii) WAAR. Als $\mathbf{p}$ een randpunt is van G , dan bevat iedere open bol rond $\mathbf{p}$ minimaal één punt van G en minimaal één punt van G^c . Het punt $\mathbf{p}$ is dus geen inwendig punt van G . Omdat G open is, bestaat G slechts uit inwendige punten. Kortom, $\mathbf{p}$ ligt niet in G en dus geldt dat $\mathbf{p} \in G^c$.
- (iii) NIET WAAR. Kies bijvoorbeeld voor $G \subset \mathbb{R}^2$ de open cirkelschijf rond het punt $(0,0)$ met straal 1. Het punt $\mathbf{p} = (1,0)$ behoort niet tot G , maar iedere cirkelschijf rond $\mathbf{p}$ bevat punten van G , dus $\mathbf{p}$ is wel een limietpunt van G .
- (iv) NIET WAAR. Kies bijvoorbeeld voor $G \subset \mathbb{R}^2$ de vereniging van de open cirkelschijven met straal 1 rond de punten $\mathbf{p} = (0,0)$ en $\mathbf{q} = (3,0)$. De vereniging van twee open verzamelingen is weer open, maar het verbindingslijnstuk tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ ligt duidelijk niet geheel in G .

6. a) Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \varepsilon/2$ dan geldt voor alle $\mathbf{x} = (x, y)$ met $\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| < \delta$, dus met $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, dat

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^3 + (\sqrt{x^2 + y^2})^3}{x^2 + y^2} = \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $f(x, y)$ is continu in $(x, y) = (0, 0)$.

b)

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

en

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^3}{h^2} - 0}{h} = -1.$$

c) Bekijk de limiet

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - hf_x(0, 0) - kf_y(0, 0)}{\|\mathbf{h}\|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3 - k^3}{h^2 + k^2} - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk(h - k)}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Deze limiet bestaat niet (en is dus zeker geen 0), wat eenvoudig te zien is bij nadering van $(0,0)$ via de lijnen $h = 2k$ en $h = 3k$. Conclusie: f is niet differentieerbaar in $(0,0)$.

- d) De eenheidsvector in de richting $(3,4)$ is $\mathbf{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. De partiële afgeleiden in $(1,1)$ zijn:

$$f_x(1, 1) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(1,1)} = \frac{3}{2}$$

en

$$f_y(1, 1) = \frac{-3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{3}{2}.$$

Dus de gevraagde richtingsafgeleide is

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{10}.$$

7. Er geldt

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y},$$

en

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dan volgt hieruit dat

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(-\sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

8. We berekenen eerst de waarden van f en de partiële afgeleiden van f van de eerste en tweede orde in $(0, 1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 1) = 1 \\ f_x(0, 1) = 2xye^{(x^2+y-1)} \Big|_{(0,1)} = 0 \\ f_y(0, 1) = e^{(x^2+y-1)} + ye^{(x^2+y-1)} \Big|_{(0,1)} = 2 \\ f_{xx}(0, 1) = 2ye^{(x^2+y-1)} + 4x^2ye^{(x^2+y-1)} \Big|_{(0,1)} = 2 \\ f_{xy}(0, 1) = f_{yx}(0, 1) = 2xe^{(x^2+y-1)} + 2xye^{(x^2+y-1)} \Big|_{(0,1)} = 0 \\ f_{yy}(0, 1) = 2e^{(x^2+y-1)} + ye^{(x^2+y-1)} \Big|_{(0,1)} = 3 \end{array} \right.$$

Hieruit volgt dat het Taylorpolynoom van f van de tweede orde rond het punt $(x, y) = (0, 1)$ luidt:

$$T_2(x, y) = 1 + 2(y - 1) + x^2 + \frac{3}{2}(y - 1)^2.$$