

1. Stel $z = re^{i\phi}$, met $r > 0$. Dan geldt dus $z^3 = r^3 e^{3i\phi} = -8i = 8e^{-i\pi/2} = 8e^{-i\pi/2 + 2k\pi}$ met $k \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt dat $r = 2$ en $\phi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dus de oplossingen luiden (kies resp. $k = 0, 1, 2$):

$$z_1 = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = 2e^{i\pi/2} = 2i \quad \text{en} \quad z_3 = 2e^{7i\pi/6} = -\sqrt{3} - i.$$

2. Stel $z = x + iy$, met $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z-3i} &= \frac{x+2+iy}{x+i(y-3)} = \frac{(x+2+iy)(x-i(y-3))}{(x+i(y-3))(x-i(y-3))} \\ &= \frac{(x+2)x + y(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} + i \frac{xy - (x+2)(y-3)}{x^2 + (y-3)^2}. \end{aligned}$$

Dus

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z+2}{z-3i} \right) = \frac{xy - (x+2)(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} = 0$$

impliceert dat $xy - (x+2)(y-3) = 0$ én dat $x^2 + (y-3)^2 \neq 0$, oftewel

$$3x - 2y + 6 = 0 \quad \text{en} \quad (x, y) \neq (0, 3).$$

Dit is een lijn, waaruit het punt $(0, 3)$, corresponderend met $z = 3i$, is weggelaten.

3. De differentiaalvergelijking is om te schrijven tot $y'(x) = 2x(1 + y^2(x))$, waardoor te zien is dat we te maken hebben met gescheiden variabelen. Dan volgt:

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 2x dx$$

met oplossing

$$\arctan(y) = x^2 + C, \quad \text{dus} \quad y(x) = \tan(x^2 + C).$$

4. Noem $Y(s)$ de Laplace-getransformeerde van $y(x)$. Dan geldt dat

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - 1 \quad \text{en} \quad \mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - s - 3.$$

Bovendien geldt $\mathcal{L}(2e^{3x}) = \frac{2}{s-3}$. De differentiaalvergelijking wordt dus via Laplace-transformatie omgeschreven tot

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = \frac{2}{s-3} + s - 3 \quad \text{dus} \quad Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3} + \frac{1}{s-3}.$$

Terugtransformatie (via de tabel) geeft de oplossing van het beginwaardeprobleem: $y(x) = x^2 e^{3x} + e^{3x}$.

5. a) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \text{ en } x \neq -y\}$, dus (i) G is een open verzameling, omdat ieder punt van G inwendig punt is (er bestaat een ε -omgeving om ieder punt die nog binnen G ligt) en (ii) ∂G bestaat uit de lijnen $x = y$ en $x = -y$, omdat een ε -omgeving om ieder punt van die lijnen, zowel punten van G als van G^c bevat. $G \cup \partial G$ is dus heel $\mathbb{R}^2$.

- b) Benader $(0,0)$ (bijvoorbeeld) langs de lijnen $y = 2x$ en $y = 3x$. Omdat (voor $x \neq 0$) geldt $f(x, 2x) = -\frac{2}{3}$ en $f(x, 3x) = -\frac{3}{8}$ is duidelijk dat de gevraagde limiet niet kan bestaan.

6. a) Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \varepsilon$ dan geldt voor alle $\mathbf{x} = (x, y)$ met $\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| < \delta$, dus met $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, dat

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon.$$

Dus $f(x, y)$ is continu in $(x, y) = (0, 0)$.

b)

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

en

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

- c) Bekijk de limiet

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - hf_x(0, 0) - kf_y(0, 0)}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^2 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Deze limiet bestaat niet (en is dus zeker geen 0), wat eenvoudig te zien is bij nadering van $(0, 0)$ via de lijn $h = k$. f is dus niet differentieerbaar in $(0, 0)$.

- d) De eenheidsvector in de richting $(1, -1)$ is $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. De partiële afgeleiden in $(1, 1)$ zijn:

$$f_x(1, 1) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}$$

en

$$f_y(1, 1) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Big|_{(1,1)} = 0.$$

Dus de gevraagde richtingsafgeleide is

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

7. Allereerst geldt

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2yf_1 + xf_2,$$

waarbij f_1 en f_2 de partiële afgeleide van f naar de eerste resp. tweede variabele zijn. Dan volgt hieruit dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (2yf_1 + xf_2) = 2y \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + f_2 + x \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= 4xyf_{11} + 2y^2f_{12} + f_2 + 2x^2f_{21} + xyf_{22} = 4xyf_{11} + 2(x^2 + y^2)f_{12} + xyf_{22} + f_2, \end{aligned}$$

waarbij $f_{11}, f_{12} = f_{21}$ en f_{22} de tweede-orde partiële afgeleiden van f zijn.

8. We berekenen eerst de waarden van f en de partiële afgeleiden van f van de eerste en tweede orde in $(1, 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1, 0) = 1 \\ f_x(1, 0) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy) \Big|_{(1,0)} = 2 \\ f_y(1, 0) = -x^3 \sin(xy) \Big|_{(1,0)} = 0 \\ f_{xx}(1, 0) = (2 - x^2 y^2) \cos(xy) - 4xy \sin(xy) \Big|_{(1,0)} = 2 \\ f_{xy}(1, 0) = f_{yx}(1, 0) = -3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy) \Big|_{(1,0)} = 0 \\ f_{yy}(1, 0) = -x^4 \cos(xy) \Big|_{(1,0)} = -1 \end{array} \right.$$

Hieruit volgt dat het Taylorpolynoom van f van de tweede orde rond het punt $(x, y) = (1, 0)$ luidt:

$$T_2(x, y) = 1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2 - \frac{1}{2}y^2 = x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$