

Tentamen Analyse 1

26 maart 2014, 15.15-17.15

- Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen (cijfer=(4+ aantal punten)/4).
- Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij de antwoorden!
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. [4 punten] Bereken welke functies $y(x)$ met domein $\mathbb{R}^+$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$y' + \frac{y}{2x} = 5x.$$

2. [3 punten] Geef de algemene oplossing $y(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$y' = y \sin(x)$$

3. [5 punten] Bereken de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 25 \sin(x) \\ y(0) = 4, y'(0) = 2. \end{cases}$$

4. [3 punten] Bepaal (eventueel met behulp van de tabel met Laplace getransformeerden) de Laplace getransformeerde van de functie

$$f(t) = \begin{cases} te^{-3t} & \text{als } t \geq 0, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

geef daarbij duidelijk aan wat het domein is van deze Laplace getransformeerde.

5. [3 punten] Bepaal de convergentiestraal R van de (complexe) machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{\sqrt{n}} z^{2n}.$$

6. Laat $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,$$

met beginwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$.

(a) [5 punten] Laat zien dat voor $n \geq 0$ geldt dat

$$(n^2 + 3n + 2)a_{n+2} = (n^2 + n - 6)a_n.$$

(b) [2 punten] Bereken alle coëfficiënten a_n .

7. Laat f de functie zijn die gegeven wordt door $f(x) = |\sin(x)|$.

(a) [5 punten] Laat zien dat de Fourierreeks van f gegeven wordt door

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(2jx)}{4j^2 - 1}.$$

Je kunt daarbij gebruiken dat $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b)$.

(b) [3 punten] Bereken

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{4j^2 - 1},$$

geef aan welke stelling je daarbij gebruikt en waarom je die kunt gebruiken.

(c) [3 punten] Bereken

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(4j^2 - 1)^2}.$$

Je kunt daarbij gebruiken dat $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$.