
Tentamen
Analyse 1A

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Dinsdag 20 Oktober 2015, 12:00 - 14:45

Instructies: 8 open vragen + 1 extra credit vraag.

Geen rekenmachines, boeken, smartphones of formulebladen.

Normering: 1 (3 ptn), 2 (3 ptn), 3 (4 ptn), 4 (3 ptn), 5 (4 ptn), 6 (3 ptn), 7 (3 ptn), 8 (4 ptn), 9 (3 ptn). Som 9 is een extra credit som!!!

Cijfer tentamen: $\# \text{ ptn}/3 + 1$.

1. Bewijs dmv volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Bereken de volgende limiet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 4 \cos(n) + 8n} \right)$$

3. Gegeven een continue functie $f: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met de eigenschappen $f(0) = 1$ en $f(1) = 0$. Bewijs mbv de tussenwaarde stelling dat er een $y \in (0, 1)$ bestaat zodat $f(y) = y$. (Hint: gebruik de functie $g(x) = f(x) - x$)

4. Bereken de afgeleiden van:

(a) $f(x) = \sin(x^2)$;

(b) $g(x) = \frac{7x+5}{x^2+5}$;

(c) $h(x) = \ln(\tan(x))$, $x \in (0, \pi/2)$.

5. Toon aan dat de volgende functie continu is in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

6. Toon aan, mbv de (ϵ, δ) -definitie van uniforme continuïteit, dat de functie

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

uniform continu is op $\mathbb{R}$ (Hint: je mag gebruik maken van het feit dat $\frac{|x|}{(x^2+1)} \leq 1/2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$).

7. Ga na of onderstaande bewering juist of onjuist is. Als de bewering juist is, geef dan een bewijs. Als de bewering onjuist is, geef dan een tegenvoorbeeld.

Als (a_n) een begrensde rij is en (b_n) is een Cauchy rij, dan is de product rij (a_nb_n) een convergente rij.

8. Bereken de volgende limieten, indien ze bestaan. Geef anders aan waarom de limiet niet bestaat.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 2x - 3};$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 3 \sin(x)}{\tan(x) + 2x}.$

(Hint: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$).

- 9*. Toon aan mbv Taylor's Stelling rond $a = 0$ dat

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

voor alle $x \in (-\pi, \pi)$ (Hint: gebruik de rest termen $R_2(x)$ and $R_4(x)$).