

Naam:

Uitwerkingen op dit blad!

Tentamen

Afdeling Wiskunde

Analyse 1A

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Datum: Dinsdag 21 Oktober, 12:00 - 14:45

Instructies: 8 open vragen.

Geen rekenmachines, boeken, smartphones of formulebladen.

Normering: 1 (3 ptn), 2b (2 ptn), 2b (3 ptn), 3 (3 ptn), 4 (3 ptn), 5a (2 ptn), 5b (2 ptn), 5c* (2 ptn), 6 (3 ptn), 7 (3 ptn), 8 (3ptn).

Cijfer tentamen: # ptn/3 +1.

1. Bewijs dmv volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

2. Bereken de volgende limieten:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7}{n^3}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$

3. Bewijs dat $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

4. Geef sup, inf, lim sup en lim inf van de volgende rij:

$$a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Onderzoek of the volgende reeksen absoluut convergent, relatief convergent of divergent zijn

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$ (Hint: $\ln(n) < n$ voor all $n \in \mathbb{N}$)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$

$$(c)^* \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + \ln(n)}$$

* Bonus som

6. Toon aan dat de volgende functie continu is in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

7. Gegeven een continue functie $f: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met de eigenschappen $f(0) = 1$ en $f(1) = 0$. Bewijs dat er een $y \in (0, 1)$ bestaat zodat $f(y) = y$. (Hint: gebruik de functie $g(x) = f(x) - x$)

8. Toon aan dmv de definitie van uniforme continueit dat de functie

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

uniform continu is op $\mathbb{R}$. (Hint: je mag gebruik maken van het feit dat $\frac{|x|}{(x^2+1)} \leq 1/2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$)