

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
De normering staat bij de vragen aangegeven.
Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$.

SUCCES!

Opgave 1 [10 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{x>0}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. Er geldt $E_\theta X_1 = \sqrt{\pi/\theta}$.

- [2 punten] Bepaal de momentenschatter voor θ .
- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- [3 punten] Bepaal de a posteriori dichtheid voor θ op basis van a priori dichtheid $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} 1_{\theta>0}$. Welke bekende dichtheid is de a posteriori dichtheid? (U mag gebruik maken van de definitie van de Gamma-verdeling, onderaan deze pagina.)
- [2 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor θ .

Gamma-verdeling

Een stochastische grootte X die $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeeld is, heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} 1_{(0, \infty)}(x)$$

met $\alpha, \lambda > 0$, waar de Gamma-functie als volgt gedefinieerd is:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

met de eigenschap $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan $E_{\alpha, \lambda} X = \alpha/\lambda$ en $\text{var}_{\alpha, \lambda} X = \alpha/\lambda^2$.

Opgave 2 [9 punten]

We zijn geïnteresseerd in de fractie Nederlanders die tegenwoordig op wintersport gaat. Voorheen was deze fractie ongeveer 7%, en we verwachten dat deze fractie kleiner is geworden vanwege de recente economische crisis. We noteren de huidige fractie Nederlanders die op wintersport gaat met p en vragen ons af of de nulhypothese $H_0 : p \geq 0.07$ waar kan zijn. We nemen een aselechte steekproef van n Nederlanders en noteren het aantal mensen dat met wintersport gaat binnen de steekproef met X . Hoe groot moeten we n minimaal kiezen om bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha_0 = 0.05$ een onderscheidend vermogen in $p = 0.05$ van ten minste 80 % te realiseren? Ga als volgt te werk: bepaal eerst het (benaderende) kritieke gebied voor X in termen van n en stel daarna het onderscheidend vermogen in $p = 0.05$ gelijk aan minimaal 0.8.

Opgave 3 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de normale verdeling met verwachting 0 en onbekende variantie $\theta > 0$,

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}.$$

- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- [3 punten] Bepaal de likelihood-ratiostatistiek $\lambda_n(X_1, \dots, X_n)$ voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = 1$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \theta \neq 1$.
- [3 punten] Bepaal de limietverdeling van $2 \log \lambda_n(X_1, \dots, X_n)$ en geef het (benaderende) kritieke gebied voor de likelihood-ratiotoets bij onbetrouwbaarheid α_0 .

Opgave 4 [8 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de exponentiële verdeling met onbekende parameter $\theta > 0$. De verdelingsfunctie van X_1 is $F(x) = 1 - e^{-\theta x}$ voor $x > 0$. Als $\theta = 1/2$ dan is de grootheid $\sum_{i=1}^n X_i^2$ chikwadraat verdeeld met $2n$ vrijheidsgraden. Noteer het α -kwantiel van de χ_{2n}^2 -verdeling met $F_{2n}^{-1}(\alpha)$.

- [2 punten] Geef de algemene definitie van een pivot.
- [3 punten] Laat zien dat, voor willekeurige θ , de grootheid $4\theta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2$ een pivot is.
- [3 punten] Bepaal een betrouwbaarheidsinterval voor θ met onbetrouwbaarheid α op basis van de pivot uit onderdeel (b).