

|                    |                                                |
|--------------------|------------------------------------------------|
| Afdeling Wiskunde  | Volledig tentamen Algemene Statistiek voor BWI |
|                    | Deeltentamen II Algemene Statistiek voor BWI   |
| Vrije Universiteit | 25 mei 2011                                    |

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.  
 U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.  
 Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.  
 De normering staat bij de vragen aangegeven.  
 Cijfer voor volledig tentamen =  $\frac{\text{totaal}+4}{4}$ . (opgaven 1,2,3,4)  
 Cijfer voor deeltentamen II =  $\frac{\text{totaal}+3}{3}$ . (opgaven 3,4,5)

SUCCES!

**Opgave 1** [8 punten] **Alleen voor gehele tentamen**

Zij  $X_1, \dots, X_m$  een steekproef uit de normale verdeling met verwachting  $\mu$  en variantie gelijk aan 1 en  $Y_1, \dots, Y_n$  een steekproef uit de normale verdeling met verwachting  $\mu$  en variantie gelijk aan 2. We nemen aan dat de twee steekproeven onafhankelijk zijn.

- [1 punt] Behoren de twee genoemde normale verdelingen tot dezelfde lokatie-schaalfamilie? Beargumenteer uw antwoord.
- [1 punt] Met welk doel maakt men in het algemeen een QQ-plot?
- [1 punt] Wanneer  $n = m$  kan men de punten  $(X_{(i)}, Y_{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, n$  tekenen. Welke lijn levert dit ongeveer op?
- [1 punt] Zij  $T_c = c\bar{X} + (1 - c)\bar{Y}$  met  $c \in [0, 1]$  een schatter voor  $\mu$ . Is deze schatter zuiver?
- [4 punten] Voor welke waarde van  $c$  is de schatter  $T_c$  optimaal? (Ga hierbij uit van algemene aantallen  $n$  en  $m$ , en niet van  $n = m$ .)

**Opgave 2** [10 punten] **Alleen voor gehele tentamen**

Veronderstel dat  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef is uit de verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x),$$

waar  $\theta > 0$  een onbekende parameter is.

- [2 punten] Bepaal de momentenschatter voor  $\theta$  op basis van deze steekproef.
- [3 punten] Bepaal de mean square error van de momentenschatter voor  $\theta$ .
- [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor  $\theta$ .
- [2 punten] Men kan laten zien dat de mean square error van de maximum likelihood-schatter gelijk is aan  $\frac{2\theta^2}{(3n+1)(3n+2)}$ . Welke van de twee schatters verdient de voorkeur?

**Opgave 3** [10 punten]

*“Een Kamermeerderheid van in ieder geval VVD, CDA, SP, D66, ChristenUnie en SGP vindt dat prinses Máxima gewoon koningin moet worden. PvdA, GroenLinks en de Partij voor de Dieren hadden op 6 mei in de GPD-bladen ervoor gepleit om Máxima niet automatisch koningin te laten worden.”* (NU.nl 13 mei 2011).

We willen nu onderzoeken hoe de Nederlandse bevolking over deze kwestie denkt. We noteren de fractie Nederlanders die voorstander is van de koninginstitel met  $p$  en vragen ons af of de nulhypothese  $H_0 : p \leq 2/3$  waar kan zijn. We nemen een aselechte steekproef van  $n$  Nederlanders en noteren het aantal voorstanders in de steekproef met  $X$ . Hoe groot moeten we  $n$  minimaal kiezen om bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van  $\alpha = 0.05$  een onderscheidend vermogen in  $p = 0.75$  van ten minste 80 % te realiseren? Ga als volgt te werk: bepaal eerst het kritieke gebied voor  $X$  in termen van  $n$  en stel daarna het onderscheidend vermogen in  $p = 0.75$  gelijk aan minimaal 0.8.

**Opgave 4** [8 punten]

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2x\theta e^{-\theta x^2} 1_{[0, \infty)}(x)$$

met  $\theta > 0$  een onbekende parameter. Het kan bewezen worden dat de grootheden  $X_1^2, \dots, X_n^2$  exponentieel verdeeld zijn met parameter  $\theta$ . Wanneer  $\theta = 1$  heeft de grootheid  $2 \sum_{i=1}^n X_i^2$  de  $\chi_{2n}^2$ -verdeling, de chikwadraat-verdeling met  $2n$  vrijheidsgraden. Noteer het  $\alpha$ -kwantiel van de  $\chi_{2n}^2$ -verdeling met  $F_{2n}^{-1}(\alpha)$ .

- [2 punten] Geef de algemene definitie van een pivot.
- [3 punten] Laat zien dat voor algemene  $\theta > 0$  de grootheid  $2 \sum_{i=1}^n \theta X_i^2$  een pivot is.
- [3 punten] Bepaal een  $(1 - \alpha)$ -betrouwbaarheidsinterval voor  $\theta$  op basis van de pivot uit onderdeel b.

**Opgave 5** [9 punten] **Alleen voor deeltentamen II**

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 3\theta x^2 e^{-\theta x^3} 1_{[0, \infty)}(x)$$

met  $\theta > 0$  een onbekende parameter.

- [4 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter  $\hat{\theta}$  voor  $\theta$ .
- [2 punten] Bepaal de waargenomen informatie  $\hat{i}_\theta$ .
- [1 punt] Welke asymptotische verdeling heeft  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ ?
- [2 punten] Bepaal een benaderend  $(1 - \alpha)$ -betrouwbaarheidsgebied voor  $\theta$  gebaseerd op de maximum likelihood-schatter.