

Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.

De normering staat bij de vragen aangegeven. Cijfer = $\frac{\text{totaal}+3}{3}$.

SUCCES!

Opgave 1 [4 punten]

- a. [2 punten] Geef een voordeel en een nadeel van een statistisch model met weinig onbekende parameters ten opzichte van een statistisch model met veel onbekende parameters.
- b. [2 punten] Beargumenteer kort of de volgende uitspraak waar dan wel niet waar is: Als de kwantielfunctie van een verdeling F lineair is in α , ofwel $F^{-1}(\alpha) = a + b\alpha$ voor zekere constanten $a \in \mathbb{R}$ en $b > 0$, dan zit de verdeling F in de locatie-schaalfamilie van de homogene verdeling op het interval $[0, 1]$.

Opgave 2 [10 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{[0, \theta]}(x),$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- a. [2 punten] Bepaal de momentenschatting voor θ op basis van deze steekproef.
- b. [3 punten] Bepaal de mean square error van de momentenschatting voor θ .
- c. [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatting voor θ .
- d. [2 punten] Men kan laten zien dat de mean square error van de maximum likelihood-schatting gelijk is aan $\frac{\theta^2}{(n+1)(2n+1)}$. Welke van de twee schatters verdient de voorkeur?

Opgave 3 [9 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling F_θ met dichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x),$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [2 punten] Bepaal de verdelingsfunctie $x \mapsto F_\theta(x)$.
- [2 punten] Bepaal een uitdrukking voor het α -kwantiel $F_\theta^{-1}(\alpha)$ behorende bij deze verdeling.
- [5 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor $E_\theta X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}$.

Opgave 4 [4 punten]

Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef is uit de verdeling met dichtheid $x \mapsto p_\theta(x)$, waar $\theta \in [0, 1]$ een onbekende parameter is.

- [2 punten] Laat zien dat de a posteriori dichtheid gelijk is aan de likelihood-functie, ofwel $p_{\Theta|X=x}(\theta) = L(\theta; x)$, wanneer we als a priori dichtheid de Bèta(1, 1)-dichtheid nemen (zie onderaan deze pagina).
- [2 punten] Geef aan (met een duidelijk argument) of de volgende uitspraak wel of niet correct is: de Bayes-schatter voor θ ten opzichte van de Bèta(1, 1) a priori dichtheid is gelijk aan de maximum likelihood-schatter voor θ .

Bèta-verdeling

Een stochastische grootte X die Bèta(α, β)-verdeeld is heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

met $\alpha, \beta > 0$, waar de Bèta-functie als volgt gedefinieerd is:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

met de eigenschap $B(\alpha+1, \beta)/B(\alpha, \beta) = \alpha/(\alpha+\beta)$. De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan $EX = \alpha/(\alpha+\beta)$ en $\text{var}X = \alpha\beta/((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1))$.