

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
Er zijn 4 vragen. De normering staat bij de vragen aangegeven.
Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$.

SUCCES!

Opgave 1 [10 punten]

Gegeven is een steekproef $X_1, \dots, X_n$ uit de Poisson(λ)-verdeling, met $\lambda > 0$ een onbekende parameter. Zij $T_c = c\bar{X}$ een schatter voor λ .

- (a) [2 punten] Voor welke waarde van c is de schatter T_c zuiver? Met welke schattingsmethode zouden we deze zuivere schatter ook gevonden hebben?
- (b) [4 punten] Bereken de mean square error $MSE(\lambda; T_c)$.
- (c) [3 punten] Voor welke waarde van c is deze schatter optimaal?
- (d) [1 punt] De verkregen waarde voor c is onbruikbaar in de praktijk omdat deze van de onbekende λ afhangt. Bepaal de limiet van de optimale waarde van c voor $n \rightarrow \infty$. Welke schatter T_c krijg je dan?

Opgave 2 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- (b) [3 punten] Bepaal de likelihood-ratiostatistiek λ_n voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- (c) [3 punten] Geef het *kritieke gebied* voor de likelihood-ratiotoets bij onbetrouwbaarheidsdrempel α .

Opgave 3 [9 punten]

Op 6 augustus 2009 stond in het nieuws dat de Nederlandse Spoorwegen last hebben van de financiële crisis. Maar er is ook een lichtpuntje: “Hoewel de bedrijfsresultaten onder druk staan, is NS wel blij met de klanttevredenheid. Deze bevindt zich op een ongekend hoog niveau: 79 procent van de klanten waardeert de dienstverlening nu met een cijfer 7 of meer.” We definiëren de fractie p als de fractie reizigers die de dienstverlening met een cijfer 7 of hoger waardeert. Om na te gaan of de uitspraak waar is, gaan we willekeurig n treinreizigers de vraag stellen welk cijfer ze geven aan de dienstverlening van de NS. We noteren X voor het aantal reizigers in onze steekproef dat een cijfer 7 of hoger geeft. Aan de hand van deze data willen we de nulhypothese $H_0 : p \geq 0.79$ toetsen tegen de alternatieve hypothese $H_1 : p < 0.79$. We nemen voor de eenvoud aan dat de steekproef met teruglegging is. Hoe groot moeten we n minimaal kiezen om bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0.05$ een onderscheidend vermogen in $p = 0.75$ van ten minste 80 % te realiseren?

Ga als volgt te werk: bepaal eerst het kritieke gebied voor X in termen van n en stel daarna het onderscheidend vermogen in $p = 0.75$ gelijk aan minimaal 0.8.

Opgave 4 [8 punten]

Gegeven is een steekproef $X_1, \dots, X_n$ uit een normale verdeling met onbekende verwachting μ en bekende variantie σ^2 . We vergelijken twee manieren om een betrouwbaarheidsgebied voor μ op te stellen.

- (a) [3 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_μ en geef de formule voor het benaderende betrouwbaarheidsinterval voor μ met onbetrouwbaarheid α gebaseerd op de maximum likelihood-schatter voor μ .
- (b) [4 punten] Leg uit waarom $T(X, \mu) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ een pivot is. Geef de verdeling van $T(X, \mu)$ onder de aanname dat μ de ware parameter is. Geef de formule voor het betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α voor μ gebaseerd op de pivot $T(X, \mu)$.
- (c) [1 punt] Leg uit waarom het benaderende betrouwbaarheidsinterval in onderdeel (a) gelijk is aan het interval gevonden in onderdeel (b).