

Afdeling Wiskunde	Volledig tentamen Algemene Statistiek voor BWI
	Deeltentamen II Algemene Statistiek voor BWI
Vrije Universiteit	28 mei 2009

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
 U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
 Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
 De normering staat bij de vragen aangegeven.
 Cijfer voor volledig tentamen = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$. (opgaven 1,2,3,4)
 Cijfer voor deeltentamen II = $\frac{\text{totaal}+3}{3}$. (opgaven 3,4,5)

SUCCES!

Opgave 1 [Alleen voor volledig tentamen] [6 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{a}{x} \mathbf{1}_{[1, \theta]}(x)$$

met $\theta > 1$ onbekend en a een normalisatieconstante.

- (a) [2 punten] Laat zien dat $a = 1/\log \theta$.
- (b) [4 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .

Opgave 2 [Alleen voor volledig tentamen] [11 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}_{[0, \theta]}(x)$$

met $\theta > 0$ onbekend. De schatter T_c voor θ is gegeven door $T_c = c\bar{X}$ voor $c > 0$.

- (a) [2 punten] Voor welke waarde van c is de schatter T_c zuiver?
- (b) [5 punten] Bepaal $MSE(\theta; T_c)$ voor willekeurige c .
- (c) [4 punten] Voor welke waarde van c is deze schatter optimaal? (Indien u bij onderdeel (b) geen antwoord hebt gekregen, kunt u $MSE(\theta; T_c) = \theta^2 [c^2/(10n) + (3c-2)^2]$ gebruiken. Let op: dit is niet het juiste antwoord bij (b)!))

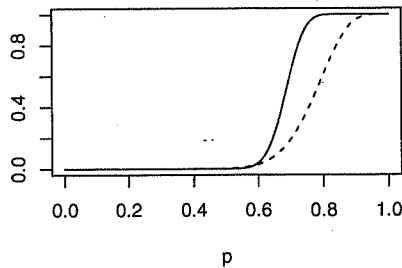


Figure 1: *Onderscheidend vermogen van twee toetsen, K_1 (doorgetrokken) en K_2 (gestippeld), voor een binomiaal verdeelde stochast voor de nulhypothese $H_0 : p \leq 0.6$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$.*

Opgave 3 [6 punten]

Geef van de uitspraken bij (a), (b) en (c) aan of de uitspraak waar of niet waar is. Beargumenteer ieder antwoord kort maar duidelijk.

- (a) [2 punten] Hoe groter het betrouwbaarheidsgebied (bij gelijke onbetrouwbaarheid) hoe meer informatie het geeft.
- (b) [2 punten] Hoe kleiner de waarde van α hoe groter het $(1 - \alpha)$ -betrouwbaarheidsgebied voor θ .

Stel $X_1 \sim \text{bin}(n_1, p)$ en $X_2 \sim \text{bin}(n_2, p)$ met onbekende parameter $p \in [0, 1]$ en $H_0 : p \leq 0.6$. In figuur 1 is het onderscheidend vermogen $p \mapsto \pi(p; K_i)$ van de binomiale toets K_i gebaseerd op X_i voor $i = 1, 2$ getekend.

- (c) [2 punten] $n_1 > n_2$.

Opgave 4 [13 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} \theta^{3/2} e^{-\theta x/2} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$$

met $\theta > 0$ onbekend. Er geldt $\mathbb{E}X_i = 3/\theta$ en $\text{var}(X_i) = 6/\theta^2$ voor $i = 1, \dots, n$.

- (a) [4 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .
- (b) [4 punten] Bepaal de Fisher-informatie i_θ .

- (c) [2 punten] Bepaal de plug in schatter $i_{\hat{\theta}}$.
- (d) [2 punten] Bepaal een benaderend $(1 - \alpha)$ -betrouwbaarheidsgebied voor θ gebaseerd op de maximum likelihood-schatter.
- (e) [1 punt] Stel dat, bij waargenomen data, het interval bij onderdeel (c) gelijk is aan: $[0.52; 0.82]$. Is het interval $[1/0.82; 1/0.52]$ dan een benaderend $(1 - \alpha)$ -betrouwbaarheidsinterval voor $1/\theta$, of niet? Beargumenteer uw antwoord.

Opgave 5 [Alleen voor deeltentamen II] [8 punten]

"Als een derde van de negen miljoen Nederlanders die jaarlijks in het buitenland op vakantie gaan in eigen land blijft, levert dat miljarden op. Staatssecretaris Frank Heemskerk (Economische Zaken) roept mensen daarom op om in eigen land op vakantie te gaan" (ANP 5 maart 2009). Met deze oproep in het achterhoofd zijn we geïnteresseerd in de fractie Nederlanders (p) die van plan is om naar het buitenland op vakantie te gaan. Als negen miljoen Nederlanders naar het buitenland op vakantie gaan, is $p = 0.55$. We ondervragen willekeurig 250 Nederlanders "met teruglegging" en noteren het aantal personen in de steekproef dat op vakantie gaat naar het buitenland met X . De stochastische grootte X volgt de binomiale verdeling met parameters $n = 250$ en $p \in (0, 1)$. We meten $x = 103$.

- (a) [4 punten] Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor p met onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$.
- (b) [1 punt] Formuleer een geschikte nul- en alternatieve hypothese om te toetsen of de Nederlanders zich houden aan de oproep van de staatssecretaris, ofwel of een derde van de negen miljoen Nederlanders in eigen land op vakantie gaat.
- (c) [3 punten] Toets de nulhypothese uit onderdeel (b) bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. U mag een benadering toepassen. *Hint: gebruik onderdeel (a).*

