

Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan en niet nuttig.  
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.  
Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.  
De normering staat bij de vragen aangegeven. Cijfer =  $\frac{\text{totaal}+4}{4}$ .

## SUCCES!

### Opgave 1 [4 punten]

Beschrijf een geschikt statistisch model, dat wil zeggen geef een passende collectie kansverdelingen, (bijvoorbeeld  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$  i.i.d.,  $\lambda > 0$ ) voor de volgende situaties:

- [2 punten] Emma wil weten hoe groot de fractie Nederlanders ( $p$ ) is die nog geen mobiele telefoon heeft. Zij vraagt daartoe aselect 153 mensen of ze een mobieltje hebben.
- [2 punten] In een vaas zit een onbekend aantal ballen ( $N$ ) ballen die genummerd zijn met de nummers  $1, 2, \dots, N$ . Bart trekt 1 bal en noteert het nummer van de bal ( $X$ ).

### Opgave 2 [5 punten]

De dichtheid behorende bij de standaard  $\chi^2_3$ -verdeling is

$$p(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x). \quad (1)$$

Indien  $X$  de standaard  $\chi^2_3$ -verdeling bezit dan bezit  $Y = X + \eta$  de verschoven  $\chi^2_3$ -verdeling met de dichtheid gegeven in (2),

$$p_\eta(y) = \frac{\sqrt{y-\eta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\eta)/2} \mathbf{1}_{[\eta,\infty)}(y) \quad (2)$$

voor locatieparameter  $\eta \in \mathbb{R}$ . Neem aan dat we een i.i.d. steekproef  $Y_1, \dots, Y_n$  waarnemen uit een verschoven  $\chi^2_3$ -verdeling met onbekende locatieparameter  $\eta \in \mathbb{R}$ .

- a. [1 punt] Om te onderzoeken of de steekproef  $Y_1, \dots, Y_n$  inderdaad uit een verschoven  $\chi_3^2$ -verdeling komt, kunnen we een QQ-plot maken. Van welke verdeling nemen we de kwantielen als  $x$ -coördinaten van de punten in de QQ-plot?
- b. [1 punt] Wat zijn de  $y$ -coördinaten van de punten in de QQ-plot?
- c. [1 punt] Welke lijn levert dat (ongeveer) op?

Indien  $X$  de standaard  $\chi_3^2$ -verdeling bezit dan bezit  $Z = X/\theta$  de geschaalde  $\chi_3^2$ -verdeling met de dichtheid gegeven in (3),

$$p_\theta(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2\pi}} \theta^{3/2} e^{-\theta z/2} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(z) \quad (3)$$

voor schaalparameter  $\theta > 0$ . Neem aan dat we een i.i.d. steekproef  $Z_1, \dots, Z_n$  waarnemen uit een geschaalde  $\chi_3^2$ -verdeling met onbekende schaalparameter  $\theta > 0$ .

- d. [2 punten] Om te onderzoeken of de steekproef  $Z_1, \dots, Z_n$  inderdaad uit een geschaalde  $\chi_3^2$ -verdeling komt, kunnen we weer een QQ-plot maken, op vergelijkbare manier als in onderdelen a) en b). Geef een schets van de lijn die (ongeveer) in de QQ-plot te zien is, en de formule voor de lijn.

### Opgave 3 [13 punten]

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een i.i.d. steekproef uit de discrete verdeling met kansmassafunctie

$$p_\theta(x) = \theta^{2-x} (1-\theta)^{x-1} \quad x \in \{1, 2\}$$

waar  $\theta \in (0, 1)$  een nog te schatten parameter is. Merk op dat  $2 - X_1$  de alternatieve verdeling met parameter  $\theta$  bezit,  $P(2 - X_1 = 0) = 1 - \theta$  en  $P(2 - X_1 = 1) = \theta$ .

- a. [7 punten] Laat zien dat de momentenschatter voor  $\theta$  gebaseerd op het eerste moment gelijk is aan de maximum likelihood-schatter voor  $\theta$ .
- b. [2 punten] Is deze schatter zuiver? (Indien u bij onderdeel a) geen antwoord hebt gekregen, neem dan als schatter  $\hat{\theta} = \bar{X} + 1$ .)
- c. [4 punten] Bereken de mean square error van de schatter uit onderdeel a). (Indien u bij onderdeel a) geen antwoord hebt gekregen, neem dan als schatter  $\hat{\theta} = \bar{X} + 1$ .)

#### Opgave 4 [14 punten]

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

waar  $\theta > 0$  een nog te schatten parameter is.

- [4 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor  $\theta$  op basis van de steekproef  $X_1, \dots, X_n$ .
- [5 punten] Neem als a priori dichtheid voor  $\theta$  de standaard  $\chi^2_3$ -dichtheid uit (1) en bepaal de a posteriori dichtheid  $p_{\Theta|X=x}$  voor  $\theta$  gegeven de waarneming  $X = (X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$ . Van welke verdeling is dit de dichtheid?  
*Toelichting: de dichtheden behorende bij de Bèta- en Gamma-verdelingen staan onderaan dit tentamen.*
- [2 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor  $\theta$  ten opzichte van de standaard  $\chi^2_3$  a priori dichtheid.
- [3 punten] Laat zien dat de Bayes-schatter voor  $\theta^2$  ten opzichte van de standaard  $\chi^2_3$  a priori dichtheid gelijk is aan  $(4n^2 + 16n + 15)/(1 + 2 \sum_{i=1}^n X_i^2)$ . *Hint: Gebruik dat de Bayes-schatter voor  $g(\theta)$  gelijk is aan de verwachting van  $g(\Theta)$  ten opzichte van de a posteriori verdeling, ofwel  $\widehat{g(\theta)} = E(g(\Theta)|X)$ .*

#### Gamma-verdeling

Een stochastische grootheid  $X$  die  $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeeld is heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

met  $\alpha, \lambda > 0$ , waar de Gamma-functie als volgt gedefinieerd is:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

met de eigenschap  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ . De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan  $EX = \alpha/\lambda$  en  $\text{var}X = \alpha/\lambda^2$ .

#### Bèta-verdeling

Een stochastische grootheid  $X$  die  $\text{Bèta}(\alpha, \beta)$ -verdeeld is heeft de volgende dichtheid:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

met  $\alpha, \beta > 0$ , waar de Bèta-functie als volgt gedefinieerd is:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

met de eigenschap  $B(\alpha + 1, \beta)/B(\alpha, \beta) = \alpha/(\alpha + \beta)$ . De verwachtingswaarde en variantie zijn gelijk aan  $EX = \alpha/(\alpha + \beta)$  en  $\text{var}X = \alpha\beta/((\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1))$ .

