

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
U krijgt beschikking over een tabellenboekje.
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
De normering staat bij de vragen aangegeven.
Cijfer = $\frac{\text{totaal} + 4}{4}$.

SUCCES!

Opgave 1 [8 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = ae^{-x} \mathbf{1}_{(\theta, \infty)}(x)$$

met $\theta \in \mathbb{R}$ onbekend en a een normalisatieconstante.

- (a) [1 punt] Laat zien dat $a = e^\theta$.
- (b) [4 punten] Bepaal een momentenschatter voor θ .
- (c) [3 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ .

Opgave 2 [9 punten]

Matthijs en Matthieu onderzoeken een oneerlijke dobbelsteen. De kans op zes ogen is bij deze dobbelsteen niet gelijk aan $1/6$, maar heeft een onbekende waarde $p \in [0, 1]$. Matthijs gooit m keer met de dobbelsteen en noteert het aantal keer dat hij zes ogen gooit als X . Matthieu gooit n keer en noteert zijn aantal maal zes met Y .

- (a) [1 punt] Geef een geschikt statistisch model voor deze situatie.
- (b) [1 punt] Matthieu stelt voor om p te schatten met $T_{\text{Matthieu}} = (X/m + Y/n)/2$. Is de schatter T_{Matthieu} zuiver voor p ?
- (c) [3 punten] De schatter van Matthieu is van de vorm $T_c = cX/m + (1 - c)Y/n$ met $c = 1/2$. Matthijs zegt dat er van deze vorm met $c \in [0, 1]$ een betere schatter is dan T_{Matthieu} . Bereken de MSE van T_c .
- (c) [4 punten] Voor welke waarde van c is de schatter T_c optimaal? Is deze optimale schatter inderdaad beter dan T_{Matthieu} ?

Opgave 3 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^x}{\theta + 1}, \quad x \in \{0, 1\},$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is. Deze verdeling komt overeen met de alternatieve verdeling met parameter $\theta/(\theta + 1)$.

- (a) [4 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ . (Indien u hier geen antwoord heeft gevonden, ga dan uit van $\hat{\theta} = 1/\bar{X}$).
- (b) [3 punten] Bepaal de waargenomen informatie $\hat{i}_\theta$.
- (c) [2 punten] Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ voor θ op basis van de maximum likelihood-schatter.

Opgave 4 [10 punten]

Volgens het Centraal Bureau voor de Statistiek is het geboortegewicht van pasgeboren kinderen gemiddeld gelijk aan 3426 gram. Klaas meet van 31 pasgeboren jongetjes het gewicht en noteert de waarnemingen als X_i voor $i = 1, \dots, 31$. Hij neemt de volgende waarden waar: $\bar{x} = 3447$ en $s_X = 134$. Klaas wil weten of het verwachte gewicht van jongetjes afwijkt van de waarde die het CBS weergeeft.

- (a) [2 punten] Geef voor deze situatie een geschikt statistisch model en formuleer een geschikte nulhypothese.
- (b) [3 punten] Toets de nulhypothese uit onderdeel (a) bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Geef de toetsingsgrootte, de verdeling van de toetsingsgrootte onder de nulhypothese en het kritieke gebied of de overschrijdingskans. Geef ook uw conclusie.

Klaas vermoedt dat meisjes bij de geboorte lichter zijn dan jongetjes. Daarom meet hij ook van 21 pasgeboren meisjes het gewicht en noteert deze waarnemingen als Y_j voor $j = 1, \dots, 21$. Hij vindt $\bar{y} = 3378$ en $s_Y = 174$.

- (c) [3 punten] Voer een geschikte toets uit om na te gaan of het vermoeden van Klaas klopt. Ga uit van een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Geef duidelijk aan welke aannames u maakt. Geef de nulhypothese, de toetsingsgrootte, de verdeling van de toetsingsgrootte onder de nulhypothese en het kritieke gebied of de overschrijdingskans. Geef ook uw conclusie.
- (d) [2 punten] Noem 2 wezenlijk verschillende mogelijkheden om het onderscheidend vermogen van de toets in onderdeel (c) te vergroten. Geef ook aan welke mogelijkheid uw voorkeur heeft.