

Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan en niet nuttig.
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
De normering staat bij de vragen aangegeven. Cijfer = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$.

SUCCES!

Opgave 1 [4 punten]

Beschrijf een geschikt statistisch model, dat wil zeggen geef een passende collectie kansverdelingen, (bijvoorbeeld $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$ i.i.d., $\lambda > 0$) voor de volgende twee situaties.

- [2 punten] Rutger wil weten hoe groot de fractie p is van de Nederlanders die in een woonhuis woont. Om dit te onderzoeken vraagt hij willekeurig 450 Nederlanders of ze in een koop- of huurhuis wonen. Daarbij let hij er niet op of hij de persoon al eerder gevraagd heeft, ofwel hij vraagt met teruglegging. De antwoorden noteert hij met "0" (als de persoon in een huurhuis woont) of "1" (als de persoon in een woonhuis woont).
- [2 punten] Dagmar wil het aantal dienbladen in de VU-kantine onderzoeken. We gaan ervan uit dat dit aantal constant is in de tijd dat Dagmar dit onderzoekt. Op 1 februari 2008 markeert zij 200 dienbladen aan de onderkant met een sticker die tegen de afwasmachine bestand is. Zij wacht vervolgens 10 weken zodat de gemarkeerde dienbladen willekeurig tussen de niet gemarkeerde dienbladen zijn verspreid. Op 15 april 2008 neemt zij een stapel van 80 dienbladen en telt het aantal gemarkeerde dienbladen in deze stapel. Dit aantal noteert zij met X .

Opgave 2 [8 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de exponentiële verdeling met parameter 1 en zij $F(x)$ de bijbehorende verdelingsfunctie. Definieer de stochasten $Y_1, \dots, Y_n$ door $Y_i = a + bX_i$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$ en $b > 0$.

- [2 punten] Geef de verdelingsfunctie $F(x)$ en de kwantiefunctie $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$.
- [2 punten] De verdelingsfunctie van Y_i ($i = 1, \dots, n$) wordt ook wel aangegeven met $F_{a,b}$. Geef de relatie tussen de kwantielen x_α en $y_\alpha = F_{a,b}^{-1}(\alpha)$. Wat is de interpretatie van a en b ?

- $$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = x \cdot -e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx$$

de a priori dichtheid voor θ . Dit is de dichtheid behorende bij de Gamma(n, λ)-verdeling. De verwachtingswaarde van een Gamma-verdeelde stochast kan gevonden worden met de volgende eigenschap van de Gamma-functie:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n.$$

- b. [5 punten] Bepaal de a posteriori dichtheid voor θ op basis van de steekproef $X_1, \dots, X_n$. Van welke verdeling is dit de dichtheid?
- c. [2 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor θ .
- d. [1 punt] Wat valt op aan de maximum likelihood-schatter en de Bayes-schatter voor $n \rightarrow \infty$?

ERRATUM

Opgave 4 [12 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de $\mathcal{N}(0, 1/\theta)$ -verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- a. [4 punten] Bepaal de maximum likelihood-schatter voor θ op basis van de steekproef.

Zij

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(m)} \theta^{m-1} \lambda^m e^{-\lambda\theta} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\theta)$$

de a priori dichtheid voor θ met $m, \lambda > 0$ bekend. Dit is de dichtheid behorende bij de Gamma(m, λ)-verdeling. De verwachtingswaarde van een Gamma-verdeelde stochast kan gevonden worden met de volgende eigenschap van de Gamma-functie:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = m.$$

- b. [5 punten] Bepaal de a posteriori dichtheid voor θ op basis van de steekproef $X_1, \dots, X_n$. Van welke verdeling is dit de dichtheid?
- c. [2 punten] Bepaal de Bayes-schatter voor θ .
- d. [1 punt] Wat valt op aan de maximum likelihood-schatter voor θ en de Bayes-schatter voor θ als $n \rightarrow \infty$?