

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
U krijgt beschikking over een tabellenboekje.
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
De normering staat bij de vragen aangegeven.

Cijfer = $\frac{\text{totaal} + 4}{4}$.

SUCCES!

Opgave 1 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de geometrische verdeling met kansmassafunctie

$$p_\theta(x) = \theta(1 - \theta)^{x-1} \quad x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

waar $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter is.

In deze opgave kunt u gebruiken dat de dichtheid van de $\text{Bèta}(\alpha, \beta)$ -verdeling de volgende vorm heeft:

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

voor $\alpha, \beta > 0$. De verwachtingswaarde van deze verdeling is $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ en de variantie is $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

- (a) [3 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}_{ML}$ voor θ .
- (b) [3 punten] Bepaal de a-posteriori verdeling voor θ ten opzichte van de $\text{Bèta}(\alpha, \beta)$ a-priori verdeling voor θ . Welke bekende verdeling is dit?
- (c) [2 punten] Bepaal de Bayes schatter $\hat{\theta}_B$ voor θ .
- (d) [1 punt] Wat valt op aan de schatters $\hat{\theta}_{ML}$ en $\hat{\theta}_B$ als $n \rightarrow \infty$?

Opgave 2 [9 punten]

Fabrikant Peijnenburg maakt ontbijtkoek in verpakkingen waarop staat dat er 600 gram in zit. Peijnenburg zegt dat zij haar vulmachine zo afstelt dat er in minimaal 95 % van de koekverpakkingen minstens 600 gram zit. Daarmee laat de fabrikant toe dat er in maximaal 5 % van de verpakkingen minder koek zit dan de aangegeven 600 gram. Op de vulmachine kan het gemiddelde μ worden ingesteld. De standaardafwijking van de vulmachine is bekend: $\sigma = 1.54$. Men mag uitgaan van normaal verdeelde gewichten.

- (a) [2 punten] Laat zien dat Peijnenburg $\mu \geq 602.5$ moet instellen als gemiddelde van de vulmachine om in minstens 95 % van de verpakkingen de genoemde 600 gram te krijgen.

Menno koopt 14 Peijnenburg ontbijtkoeken en meet de gewichten van de koeken. Menno wil vervolgens toetsen of Peijnenburg wel genoeg koek in de verpakking stopt, dat wil zeggen of Peijnenburg zich houdt aan de minimale instelling in onderdeel (a). Menno meet $\bar{x} = 601.4$.

- (b) [2 punten] Geef een passend statistisch model voor deze situatie en formuleer een geschikte nulhypothese.
- (c) [3 punten] Toets de hypothese uit onderdeel (b) bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha_0 = 0.05$ en geef uw conclusie. Vermeld de toetsingsgrootte en de verdeling.
- (d) [2 punten] Bereken een 90 %-betrouwbaarheidsinterval voor μ . Het is mogelijk om aan de hand van dit interval de nulhypothese in onderdeel (b) te toetsen. Leg uit hoe dat moet.

Opgave 3 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3}{\theta^3} x^2 1_{[0, \theta]}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) [3 punten] Bereken de verdelingsfunctie $F(x)$ en de kwantiel functie $F^{-1}(\alpha)$.
- (b) [3 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (c) [3 punten] Bepaal de momentenschatter voor θ en laat zien dat deze schatter zuiver is.

Opgave 4 [9 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{(0, \infty)}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) [3 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (b) [3 punten] Bepaal de Likelihood Ratio statistiek λ_n voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- (c) [3 punten] Geef het kritieke gebied voor de Likelihood Ratio toets bij onbetrouwbaarheidsdrempel α .