

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

U krijgt beschikking over een tabellenboekje.

Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.

De normering staat bij de vragen aangegeven.

Cijfer voor volledig tentamen = $\frac{\text{totaal}+4}{4}$. (opgaven 1,2,3,4)

Cijfer voor deeltentamen II = $\frac{\text{totaal}+3}{3}$. (opgaven 3,4,5)

SUCCES!

Opgave 1 [10 punten] [Alleen voor volledig tentamen]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2}{\theta^2} x 1_{[0,\theta]}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- [3 punten] Bepaal de verdelingsfunctie $F(x)$ en de kwantielfunctie $F^{-1}(\alpha)$.
- [3 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}_{ML}$ voor θ .
- [2 punten] Bepaal de momentenschatter $\hat{\theta}_{MOM}$ voor θ .
- [2 punten] Is de schatter $\hat{\theta}_{MOM}$ zuiver?

Opgave 2 [9 punten] [Alleen voor volledig tentamen]

Zij $X \sim \text{Bin}(n, p)$ verdeeld met n bekend en $p \in (0, 1)$ onbekend. Zij T_c een schatter voor p gegeven door:

$$T_c = c \frac{X}{n},$$

waarin $c \in \mathbb{R}$ nog onbepaald is.

- [1 punt] Voor welke c is T_c zuiver?

- b. [4 punten] Bepaal de MSE van T_c .
- c. [3 punten] Laat zien dat voor $c = \frac{np^2}{p(1-p)+np^2}$ deze schatter optimaal is.
- d. [1 punt] De verkregen waarde voor c is onbruikbaar in de praktijk omdat p onbekend is. Bepaal de limiet van deze waarde voor c voor $n \rightarrow \infty$. Welke schatter T_c krijg je dan?

Opgave 3 [7 punten]

Zij $X_1, \dots, X_n$ een i.i.d. steekproef uit de verdeling met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 3\theta x^2 e^{-\theta x^3} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) [3 punten] Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor θ gelijk is aan $\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^3}$.
- (b) [2 punten] Bepaal de waargenomen informatie.
- (c) [2 punten] Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ voor θ op basis van de meest aannemelijke schatter.

Opgave 4 [10 punten (+ 3 bonuspunten)]

De medicijnen Cozaar en Diovan zijn bedoeld om de bloeddruk te verlagen in hypertensiepatiënten, patiënten met hoge bloeddruk. In twee verschillende experimenten is de bloeddruk gemeten van hypertensiepatiënten. In het eerste experiment is de bloeddruk van 32 hypertensiepatiënten gemeten na inname van Cozaar. In het tweede experiment is de bloeddruk gemeten van 20 hypertensiepatiënten na inname van Diovan. We gaan met een statistische toets na of een van de twee medicijnen beter werkt dan de andere. Noteer de uitkomsten van de eerste steekproef als $X_1, \dots, X_{32}$ en die van de tweede als $Y_1, \dots, Y_{20}$. De gemeten uitkomsten zijn $\bar{x} = 163$, $\bar{y} = 158$, $s_X = 7.8$ en $s_Y = 9.0$.

- (a) [2 punten] Betreft het hier een gepaarde of ongepaarde steekproef? Als u zelf het experiment mag opzetten, hoe zou u dit dan doen? Zijn de waarnemingen in uw experiment gepaard of ongepaard? Beargumenteer uw antwoord.
- (b) [2 punten] Geef een statistisch model voor deze situatie en formuleer een geschikte nulhypothese.
- (c) [4 punten] Voer de toets uit bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha_0 = 0.05$. Geef de toetsingsgrootheid, de verdeling onder de nulhypothese, het kritieke gebied of de overschrijdingskans en de conclusie. Vermeld duidelijk welke aannames u maakt.

Marjon heeft een $(1-\alpha_M)$ -betrouwbaarheidsinterval berekend voor het verschil in verwachte bloeddruk van de beide groepen. Ze heeft als interval $5 \pm 6.32 = [-1.32, 11.32]$ gevonden.

- (d) [2 punten] Is $\alpha_M < 0.05$ of $\alpha_M > 0.05$? Beargumenteer uw antwoord. *Hint: gebruik uw antwoord van onderdeel (c).*
- (e) [bonusonderdeel 3 punten] Bepaal de waarde α_M die Marjon gebruikt heeft. U mag de waarde benaderen.

Opgave 5 [10 punten] [Alleen voor deelentamen II]

In het nieuws van 28 april 2007 werd beweerd dat 50 % van de Nederlanders in de zomer van 2007 naar het buitenland op vakantie gaat. Om te kijken of deze fractie p volgend jaar hoger is, plannen we een enquête voor april 2008, waarin we n Nederlanders zullen vragen of ze in de zomer van 2008 naar het buitenland op vakantie zullen gaan. Aan de hand van deze enquête willen we de nulhypothese $H_0 : p \leq 0.5$ toetsen tegen de alternatieve hypothese $H_1 : p > 0.5$ op basis van de steekproef ter grootte n . We nemen voor de eenvoud aan dat de steekproef met teruglegging is. Hoe groot moeten we n minimaal kiezen om bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0.05$ een onderscheidend vermogen in $p = 0.6$ van ten minste 95 % te realiseren? Ga als volgt te werk: bepaal eerst het kritieke gebied voor X in termen van n en stel daarna het onderscheidend vermogen in $p = 0.6$ gelijk aan minimaal 0.95.