

Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan en niet nuttig.  
Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.  
De normering staat bij de vragen aangegeven. Cijfer =  $\frac{\text{totaal}+4}{4}$ .

## SUCCES!

### Opgave 1 [8 punten]

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een i.i.d. steekproef uit de verdeling met dichtheid

$$p_\theta(x) = ax^2 \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$$

waar  $\theta > 0$  een nog te schatten parameter is en  $a$  een normalisatieconstante is.

- [2 punten] Bereken  $a$  in termen van de onbekende parameter  $\theta$ .
- [3 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter  $\hat{\theta}_{MA}$  voor  $\theta$ .
- [3 punten] Bepaal de momentenschatter  $\hat{\theta}_{MOM}$  op basis van het eerste moment. Is  $\hat{\theta}_{MOM}$  zuiver?

### Opgave 2 [4 punten]

Beschrijf een geschikt statistisch model, dat wil zeggen geef een passende collectie kansverdelingen, (bijvoorbeeld  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$  i.i.d.,  $\lambda > 0$ ) voor de volgende twee situaties.

- [2 punten] Michiel gaat onderzoeken hoe groot de fractie  $p$  van VU-studenten is die gebruik gemaakt heeft van de ijsbaan op de VU-campus afgelopen winter. Daartoe stelt hij 41 VU-studenten tijdens de lunchpauze de volgende vraag: "Heb jij geschaatst op de ijsbaan op de campus?". De antwoorden, "ja" of "nee" van iedere student, noteert Michiel.
- [2 punten] Frederique is geïnteresseerd in het gemiddelde gewicht  $g$  van een beschuit. Om dit te bepalen koopt zij een rol beschuit met daarin 13 beschuiten. Ze weegt alle beschuiten afzonderlijk en noteert de uitkomsten als  $Y_1, \dots, Y_{13}$ .

**Opgave 3** [14 punten]

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een i.i.d. steekproef uit de exponentiële verdeling met parameter  $\lambda$  en zij  $F(x)$  de bijbehorende verdelingsfunctie. Definieer de stochasten  $Y_1, \dots, Y_n$  door  $Y_i = a + bX_i$  voor zekere  $a \in \mathbb{R}$  en  $b > 0$ .

- [3 punten] Bereken de kwantiefunctie  $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$  van de  $\text{Exp}(\lambda)$  verdeling.
- [2 punten] De verdelingsfunctie van  $Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wordt ook wel aangegeven met  $F_{a,b}$ . Geef de relatie tussen de kwantielen  $x_\alpha$  en  $y_\alpha = F_{a,b}^{-1}(\alpha)$ . Wat is de interpretatie van  $a$  en  $b$ ?
- [2 punten] In het geval dat  $a = 0$ , is de  $F_{0,b}$  verdeling weer gelijk aan een exponentiële verdeling,  $F_{0,b} = \text{Exp}(\xi)$ . Bepaal de parameter  $\xi$  in termen van  $b$  en  $\lambda$ .

Zij

$$\pi(\lambda) = \frac{\lambda^{k-1} \mu^k e^{-\mu\lambda}}{(k-1)!} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\lambda)$$

de a priori dichtheid voor  $\lambda$ , met  $k \in \mathbb{N}$  en  $\mu > 0$  bekend. Dit is de  $\Gamma(k, \mu)$ -dichtheid en aangezien het een dichtheid is, geldt

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} \mu^k e^{-\mu\lambda} d\lambda = (k-1)!$$

- [5 punten] Bereken de a posteriori dichtheid voor  $\lambda$  op basis van de steekproef  $X_1, \dots, X_n$ . Van welke verdeling is dit de dichtheid?
- [2 punten] Bepaal de Bayes schatter voor  $\lambda$ .

**Opgave 4** [10 punten]

Zij  $X_1, \dots, X_n$  een i.i.d. steekproef uit de alternatieve verdeling (ook wel: Bernoulli-verdeling) met parameter  $p$ :

$$p(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

Deze notatie geeft  $P(X=1) = p$  en  $P(X=0) = 1-p$  weer in één uitdrukking.

- [4 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter  $\hat{p}_{MA}$  voor  $p$ .
- [3 punten] Bereken de MSE van  $\hat{p}_{MA}$ .
- [1 punt] Als u een tweede schatter  $\hat{p}_2$  krijgt voorgesteld met een MSE van  $\frac{p(1-p)}{10}$ , aan welke geeft u dan de voorkeur,  $\hat{p}_{MA}$  of  $\hat{p}_2$ ?
- [2 punten] Bepaal de meest aannemelijke schatter voor  $\frac{1}{p}$ .