



Afdeling Wiskunde

Tentamen Algemene Statistiek voor BWI

Vrije Universiteit

1 juni 2006

Deeltentamen 2 bestaat uit opgaven 3(a t/m d), 4 en 5.
Het volledig tentamen bestaat uit opgaven 1, 2, 3 en 4.
De normering staat op pagina 3.

U krijgt beschikking over een tabellenboekje.
Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.

SUCCES!

Opgave 1 (Alleen voor volledig tentamen)

Gegeven een steekproef $X_1, \dots, X_n$ uit de $\text{Hom}[0, \theta]$ -verdeling, met $\theta > 0$ een onbekende parameter. Zij $T_c = c\bar{X}$ een schatter voor θ .

- (a) Voor welke c is T_c zuiver? Met welke schattingsmethode zouden we deze zuivere schatter ook gevonden hebben?
- (b) Bereken de mean square error $MSE(\theta; T_c)$.
- (c) Voor welke waarde van c is deze schatter optimaal?

Opgave 2 (Alleen voor volledig tentamen)

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit de Bernoulli($1 - \theta$)-verdeling met $P(X_1 = 1) = 1 - \theta$ en $P(X_1 = 0) = \theta$. We willen de onbekende parameter $\theta \in (0, 1)$ schatten.

- (a) Bereken de momentschatter voor θ .
- (b) Welke verdeling heeft $X = X_1 + \dots + X_n$? Geef een formule voor de dichtheid $p_\theta(x)$ van X .
- (c) Bereken de Bayes schatter voor θ ten opzichte van de a priori verdeling

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbf{1}_{(0,1)}(\theta),$$

de Bèta(α, β)-verdeling met parameters $\alpha, \beta > -1$, gebaseerd op de waarneming $X = X_1 + \dots + X_n$. (U mag gebruikmaken van de gelijkheid $B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$.)

Opgave 3

De juiste volgorde van de Waddeneilanden (van west naar oost: Texel, Vlieland, Terschelling, Ameland, Schiermonnikoog) is niet bij iedere Amsterdammer bekend. We vermoeden dat minder dan 80% van de hoofdstedelingen het eiland Vlieland weet te liggen. De werkelijke (onbekende) fractie noemen we p . Om te onderzoeken hoeveel Amsterdammers dit eiland correct kunnen aanwijzen, vragen we willekeurig aan 100 Amsterdammers op een kaart van Nederland Vlieland aan te wijzen. We tellen hoe vaak dit goed gaat, en noteren X voor het aantal mensen dat Vlieland correct weet aan te wijzen.

- (a) Geef een statistisch model voor deze situatie.
- (b) Formuleer een geschikte nulhypothese.

Het blijkt dat 75 mensen Vlieland correct aan kunnen wijzen.

- (c) Bepaal (bij benadering) de overschrijdingskans corresponderend met de antwoorden uit (a) en (b).
- (d) Bepaal (bij benadering) het kritieke gebied voor X bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$. Toets de nulhypothese uit (b) en geef je conclusie.
- (e) (**Alleen voor volledig tentamen**) Bereken (bij benadering) het onderscheidend vermogen in $p = 0.7$, corresponderend met het antwoord bij (d).

Opgave 4

De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$$

waar $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (b) Bepaal de waargenomen informatie.
- (c) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ voor θ op basis van de meest aannemelijke schatter.
- (d) Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- (e) Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ voor θ op basis van de likelihood ratio statistiek.



Opgave 5 (Alleen voor deeltentamen)

Een fabrikant van zonnebrandmiddelen krijgt controle van de Voedsel en Waren Autoriteit (VWA) op de inhoud van zijn tubes zonnebrandcrème. Op de tube staat vermeld dat er 150 ml crème in zit, en de VWA wil controleren of de fabrikant er daadwerkelijk genoeg in stopt. We nemen aan dat de inhoud normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ , beide onbekend. Bij de controle meet de VWA de volgende inhouden (in ml): 150.10, 149.55, 150.00, 149.65, 149.35, 150.15, 149.75, 150.00, 149.65, 150.20, 149.20, 149.95. Wanneer we deze noteren als $X_1, \dots, X_{12}$ dan is $\bar{x} = 149.80$ en $s_x^2 = 0.11$.

- (a) Beschrijf een statistisch model voor bovenstaande situatie en geef een geschikte nulhypothese.
- (b) Toets de nulhypothese uit antwoord a) met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$. Vermeld daarbij de toetsingsgrootte, het kritieke gebied en uw conclusie.
- (c) Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor μ .

De fabrikant krijgt een waarschuwing van de VWA en past naar eigen zeggen de instellingen van de vulmachine aan. De VWA komt opnieuw meten om te controleren of de fabrikant na de waarschuwing inderdaad meer crème in de tubes doet. Tijdens de tweede meting worden de volgende getallen, $Y_1, \dots, Y_{10}$, gemeten: 149.85, 150.15, 150.05, 149.90, 150.30, 150.05, 149.95, 149.75, 149.95, 150.10 met $\bar{y} = 150.01$ en $s_y^2 = 0.033$.

- (d) Toets de bewering van de fabrikant dat het verwachte gewicht bij de tweede meting hoger is dan bij de eerste bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5%. Geef daarbij duidelijk aan welke aannames u maakt. Vermeld de toetsingsgrootte, het kritieke gebied en uw conclusie.

Normering:

1a:	2	2a:	2	3a:	2	4a:	3	5a:	2
1b:	4	2b:	2	3b:	1	4b:	3	5b:	4
1c:	3	2c:	6	3c:	4	4c:	2	5c:	3
				3d:	3	4d:	3	5d:	4
				3e:	3	4e:	2		
1	(9)	2	(10)	3	(13 of 10)	4	(13)	5	(13)

Cijfer Deeltentamen 2: $= (\text{totaal} + 4) / 4$ (alleen opgaven 3 a t/m d, 4, 5)

Cijfer Volledig tentamen: $= (\text{totaal} + 5) / 5$ (alleen opgaven 1, 2, 3, 4)