

Algemene Statistiek – 2BWI

HERTENTAMEN

MAANDAG 29 AUGUSTUS 2005

INSTRUCTIES

- Schrijf uw naam en student nummer op iedere pagina
- Gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet toegestaan
- Gebruik van geschreven materiaal is niet toegestaan
- U krijgt beschikking over een tabellenboekje

NORMERING

(Cijfer = totaal/100)

1(a): 5	2(a): 5	3(a): 25	4(a): 5
1(b): 5	2(b): 5		4(b): 5
1(c): 5	2(c): 5		4(c): 5
1(d): 5	2(d): 5		4(d): 5
1(e): 5			4(e): 5
1(f): 5			

Succes!

[SLA DEZE PAGINA PAS OM ZODRA DAARVOOR TOESTEMMING GEGEVEN IS]

PROBLEEM 1

De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld. Iedere X_i neemt de waarde 0 of de waarde 1 aan en heeft marginale kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2}{2+\theta} \left(\frac{\theta^x}{x+1} \right), \quad (x = 0 \text{ of } x = 1).$$

Hierin is $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$ een onbekende parameter. Dit vraagstuk behandelt verschillende methodes voor schatting van θ op basis van de waarneming $(X_1, \dots, X_n)$.

- a. Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ voor θ .

De meest aannemelijke schatter valt onder bepaalde omstandigheden buiten het model $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta > 0\}$. In de volgende twee onderdelen beschouwen we dit probleem nader.

- b. Er bestaat een realisatie $(x_1, \dots, x_n)$ van de steekproef die tot de meest aannemelijke schatting $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \infty$ leidt.

Geef de realisatie $(x_1, \dots, x_n)$.

Wat is de kans op de realisatie $(x_1, \dots, x_n)$, als functie van θ en n ?

Laat zien dat deze kans naar nul gaat in de limiet $n \rightarrow \infty$.

- c. Er bestaat ook een realisatie $(x'_1, \dots, x'_n)$ van de steekproef die tot de meest aannemelijke schatting $\hat{\theta}(x'_1, \dots, x'_n) = 0$ leidt.

Geef de realisatie $(x'_1, \dots, x'_n)$.

Laat zien dat de kans op de realisatie $(x'_1, \dots, x'_n)$ naar nul gaat in de limiet $n \rightarrow \infty$.

We kunnen ook andere methodes gebruiken voor schatting van θ . In de resterende onderdelen van dit vraagstuk beschouwen we de momentschatter en Bayesschatter voor θ .

- d. Laat zien dat

$$E_\theta X_1 = \frac{\theta}{2+\theta}.$$

Bepaal hiermee de momentschatter $\tilde{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ voor θ .

We kiezen op de parameterruimte voor θ een a-priori verdeling met kansdichtheid

$$\pi(\theta) = \begin{cases} c(\beta, \lambda) \theta^\beta (2+\theta)^n e^{-\lambda\theta}, & \text{als } \theta > 0, \\ 0 & \text{als } \theta \leq 0. \end{cases}$$

voor β en λ positieve constanten en $c(\beta, \lambda)$ een normeringsconstante.

- e. Laat zien dat de dichtheid van de a-posteriori verdeling voor θ relatief ten opzichte van deze a-priori verdeling een $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -dichtheid is.

Geef een uitdrukking voor bijbehorende α in termen van β en $(X_1, \dots, X_n)$.

Hint: de dichtheid $f_{\alpha, \lambda}$ van de $\Gamma(\alpha, \lambda)$ -verdeling heeft de vorm:

$$f_{\alpha, \lambda}(\theta) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}, & \text{als } \theta > 0, \\ 0, & \text{als } \theta \leq 0, \end{cases}$$

waarbij $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$.

- f. Bepaal de Bayes schatter voor θ behorend bij de gegeven a-priori verdeling.
(NB: U mag hierbij gebruiken dat $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ voor alle $\alpha > 0$.)

PROBLEEM 2

De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn *i.i.d.*- P_θ verdeeld, waarbij P_θ wordt voorgeschreven door de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \begin{cases} c(\theta)x^4 & \text{als } -\sqrt{\theta} \leq x \leq \sqrt{\theta}, \\ 0 & \text{als } x < -\sqrt{\theta} \text{ of } x > \sqrt{\theta}. \end{cases}$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter.

- a. Bereken de (θ -afhankelijke) normeringsconstante $c(\theta)$.

Laat zien dat c als functie van θ strikt monotoon dalend is.

- b. We definiëren $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ en $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

Geef een precieze redenering die aantoont dat de aannemelijkheidsfunctie de volgende vorm heeft:

$$L(\theta; X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n c(\theta) X_i^4, & \text{als } X_{(1)} \geq -\sqrt{\theta} \text{ én } X_{(n)} \leq \sqrt{\theta}, \\ 0, & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

- c. Toon met behulp van deze vorm van $L(\theta; X_1, \dots, X_n)$ en de monotonie van $\theta \mapsto c(\theta)$ aan dat de meest aannemelijke schatter voor θ gegeven wordt door:

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = (\max\{-X_{(1)}, X_{(n)}\})^2.$$

Er zijn echter andere mogelijke manieren om θ te schatten. We beschouwen de schatters $T_\alpha = \alpha \overline{X^2}$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$.

- d. Voor welke α is T_α een zuivere schatter voor θ ?

PROBLEEM 3

Een importeur van kleding trof in de laatste geïmporteerde lading broeken tot zijn ontzetting 10% beschadigde en daardoor onverkoopbare broeken aan. Bij de volgende grote lading wil hij weten of dit percentage nog verder is gestegen. Hij toetst daartoe de nulhypothese $H_0 : p \leq 0.10$ op basis van het percentage beschadigde broeken in een steekproef ter grootte n met teruglegging uit de volgende grote lading.

- a. Hoe groot moet de importeur n minimaal kiezen (bij benadering) om een fout van de eerste soort van ten hoogste 5% en een onderscheidend vermogen in $p = 0.12$ van ten minste 95% te bewerkstelligen?

PROBLEEM 4

De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2\sqrt{x}} e^{-\theta\sqrt{x}}, & \text{als } x > 0, \\ 0, & \text{als } x \leq 0. \end{cases}$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. De waarneming is de vector $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- Bepaal de waargenomen informatie voor θ (als functie van X).
- Geef een formule voor een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.
- Bepaal de log-likelihood-ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$.
- Geef een formule voor een benaderend (voor n groot) betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de likelihood-ratio statistiek.