

Algemene Statistiek – BWI

EERSTE DEELTENTAMEN

VRIJDAG 1 APRIL 2005

INSTRUCTIES

- Schrijf uw naam en student nummer op iedere pagina
- Motiveer al uw antwoorden duidelijk
- Gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet toegestaan
- Gebruik van geschreven materiaal zoals dictaat of formuleblad is niet toegestaan
- Indien u voortijdig klaar bent met het tentamen, lever dan uw werk in en vertrek zonder herrie te maken
- Probeer *niet* te spieken of te overleggen met uw medestudenten

SUCCES!

NORMERING *Cijfer deeltentamen = totaal aantal punten / 5*

1(a):	5	2(a):	5
1(b):	5	2(b):	5
1(c):	5	2(c):	5
1(d):	5	2(d):	5
1(e):	5	2(e):	5
		2(f):	5 (bonus)

SLA DEZE PAGINA PAS OM ZODRA DAARVOOR DE INSTRUCTIE GEGEVEN IS

PROBLEEM 1: EEN GEZAMELIJKE EXPONENTIËLE VERDELING

Laat X, Y twee stochastische variabelen zijn, gezamenlijk verdeeld volgens de kansdichtheidsfunctie $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Ce^{-\lambda(x+y-2a)}, & \text{als } x \geq a \text{ en } y \geq a, \\ 0, & \text{als } x < a \text{ of } y < a. \end{cases}$$

afhankelijk van parameters $\lambda > 0$ en $a \in \mathbb{R}$.

a. (5 punten)

Geef een uitdrukking voor de normalisatieconstante C in termen van de parameter λ .

b. (5 punten)

Toon aan dat de marginale kansdichtheidsfunctie $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor X de volgende vorm heeft:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)}, & \text{als } x \geq a, \\ 0, & \text{als } x < a. \end{cases}$$

c. (5 punten)

Zijn de stochastische variabelen X en Y onafhankelijk?

Motiveer uw antwoord met een gelijkheid.

d. (5 punten)

Bereken de verwachting $E(X + Y)$.

e. (5 punten)

Is a een locatie-, schaal- of andersoortig parameter?

Is λ een locatie-, schaal- of andersoortig parameter?

PROBLEEM 2: MAXIMUM LIKELIHOOD

Beschouw een stochastische variabele Y verdeeld volgens P met kansdichtheidsfunctie:

$$f(y) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{als } x \geq 0, \\ 0, & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

We baseren op deze verdeling een locatie-schaal familie van verdelingen $P_{a,b}$ voor de stochastische variabelen $a + bY$.

a. (5 punten)

Geef het voorschrift voor de kansdichtheidsfuncties $f_{a,b}$ op heel $\mathbb{R}$.

(Hint: Let op, de parameter a heeft betrekking op een translatie. Bedenk goed wat er gebeurt met de verzameling waarop de kansdichtheidsfunctie niet nul is.)

Gegeven is een *i.i.d.* steekproef $X_1, \dots, X_n$ van metingen van $X \sim P_{a,b}$ met onbekende parameters a, b . We hanteren dus de locatie-schaal familie als model voor de metingen. In de rest van dit vraagstuk is het doel de meest aannemelijke schatters voor a en b te vinden.

b. (5 punten)

Wat is de dimensie van het model?

Geef de parameterruimte voor de parameters a, b ?

We definiëren voor gebruik in het volgende onderdeel de eerste ordestatistiek $X_{(1)}$ als volgt:

$$X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

dat wil zeggen, $X_{(1)}$ heeft de waarde van de kleinste meting.

c. (5 punten)

Geef, met behulp van uw antwoord voor onderdeel a., de likelihood functie $L(a, b; X_1, \dots, X_n)$.

Herschrijf het voorschrift voor $L(a, b; X_1, \dots, X_n)$ met gebruik van $X_{(1)}$.

d. (5 punten)

Schets de grafiek van $a \mapsto L(a, b; X_1, \dots, X_n)$ bij vaste waarde van b .

Geef de meest-aannemelijke schatter voor de parameter a .

e. (5 punten)

Geef de log-likelihood $\ell(a, b; X_1, \dots, X_n)$ en vereenvoudig de uitdrukking zo ver mogelijk.

Leid hieruit de meest-aannemelijke schatter voor de parameter b af.

Tot nu toe hebben we twee verschillende methodes bekeken om schatters af te leiden, het maximum-likelihood voorschrift en de methode van momenten. Soms leiden deze recepten om schatters af te leiden tot dezelfde schatter. Een voorbeeld is schatting van μ in een model van normale verdelingen $N(\mu, \sigma^2)$: zowel maximum-likelihood als de methode van momenten schrijft schatting van μ met $\bar{X}_n$ voor. Maar in andere gevallen leiden maximum-likelihood en de methode van momenten tot verschillende schatters.

f. (5 punten, BONUS)

Verwacht u dat de momentenschatter voor b dezelfde vorm heeft als de meest-aannemelijke?

Motiveer uw antwoord duidelijk en volledig, zonder uitgebreide berekening.