

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. U heeft de beschikking over een tabellenboekje.

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Er volgt dat $E_\theta X_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\theta}$. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- Bepaal de waargenomen informatie voor θ .
- Geef een formule voor een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.
- Veronderstel dat is waargenomen: $\bar{x} = 1$ en $\overline{x^2} = 2$ bij $n = 100$. Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid 95 %.

2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{als } 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. We beschouwen de schatters $T_c = c\bar{X}$ voor $c \in \mathbb{R}$.

- Voor welke c is T_c een zuivere schatter voor θ ?
 - Voor welke c heeft T_c de kleinste verwachte kwadratische fout (MSE)?
 - Welke schatter T_c verdient de voorkeur?
3. Zwangerschapsduur in Nederland kan goed worden gemodelleerd met behulp van een normale verdeling met verwachting 266 dagen en standaardafwijking 16 dagen. De indruk bestaat dat het ontbreken van goede prenatale zorg in een bepaald dorp leidt tot kortere zwangerschappen. Voorstanders van prenatale zorg willen dit door middel van een statistisch onderzoek bevestigen, en verzamelen de zwangerschapsduren van 9 babies in het dorp. De data zijn: 265, 303, 250, 250, 271, 269, 266, 236, 255.
- Beschrijf een geschikt statistisch model voor deze situatie.
 - Formuleer een geschikte nulhypothese.
 - Bepaal de overschrijdingskans corresponderend met de antwoorden op a) en b).
 - Toets de nulhypothese bij onbetrouwbaarheidsdrempel 5 %.
4. Een politieke partij behaalde bij de laatste verkiezingen 20 % van de stemmen. Door middel van een opiniepeiling willen we nagaan of dit percentage is gestegen. We toetsen daartoe de nulhypothese $H_0: p \leq 0.20$ op basis van het percentage aanhangers van de partij in een steekproef ter grootte n met teruglegging. Hoe groot moeten we n minimaal kiezen (bij benadering) om een fout van de eerste soort van ten hoogste 5% en een onderscheidend vermogen in $p = 0.25$ van ten minste 95% te bewerkstelligen?

5. De stochastische grootheden Y en Z zijn onderling onafhankelijk en Gamma verdeeld met parameters $(10, \sigma)$ en $(10, \tau)$, respectievelijk. Hierin zijn $\sigma > 0$ en $\tau > 0$ onbekende parameters. De waarneming is de vector $X = (Y, Z)$. De kansdichtheid van de Gamma verdeling met parameters (n, θ) is de functie

$$s \mapsto \frac{1}{(n-1)!} s^{n-1} \theta^n e^{-\theta s} 1_{s>0}.$$

- Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0: \sigma = \tau$. Voor welke waarden van (Y, Z) wordt de nulhypothese verworpen?
- Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0: \sigma = \theta \tau$ voor gegeven waarde $\theta > 0$.
- Geef een formule voor een benaderend (voor n groot) betrouwbaarheidsinterval voor $\theta = \sigma/\tau$ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de likelihood ratio statistiek uit b).

Normering:

1a: 4	2a: 2	3a: 2	4: 6	5a: 3
1b: 2	2b: 3	3b: 1		5b: 1
1c: 1	2c: 1	3c: 4		5c: 2
1d: 2		3d: 2		

Eindcijfer= totaal/4+1