



Tweede Deeltentamen: sommen 3, 4, 5, 6.

Volledig tentamen: sommen 1, 2, 3, 5, 6.

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. U heeft de beschikking over een tabellenboekje.

1. (**Alleen Volledig tentamen.**) De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \binom{2}{x} \frac{\theta^x (1-\theta)^{2-x}}{\theta(2-\theta)}, \quad x \in \{1, 2\}.$$

Hierin is $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ (in het geval dat $1 < \bar{X} < 2$).
 - Laat zien dat $E_\theta X_1 = 2/(2-\theta)$.
 - Bepaal de momentenschatter voor θ .
 - Bepaal de dichtheid van de a-posteriori verdeling voor θ relatief ten opzichte van de a-priori verdeling met kansdichtheid $\pi(\theta) = c(\alpha, \beta) \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} (2-\theta)^n 1_{0 < \theta < 1}$, voor α en β positieve constanten en $c(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante. U mag hierbij gebruiken dat $\theta \mapsto B(\alpha, \beta) \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} 1_{0 < \theta < 1}$ de kansdichtheid van de Beta-verdeling is.
 - Bepaal de Bayes schatter voor θ behorend bij de a-priori verdeling van d). U mag hierbij gebruiken dat $B(\alpha+1, \beta) = \alpha/(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta)$ voor alle $\alpha, \beta > 0$.
2. (**Alleen Volledig tentamen.**) De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{4\theta^4}{x^5} 1_{x \geq \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Is $\bar{X}$ een zuivere schatter voor θ ?
 - Bepaal de MSE van de schatters $\bar{X}$ en $(3/4)\bar{X}$ voor θ .
 - Aan welke van de schatters $\bar{X}$ en $(3/4)\bar{X}$ voor θ geeft u de voorkeur?
3. Ter vergelijking van de juli-temperaturen in De Bilt en Eelde zijn bij het KNMI de gemiddelde juli-temperaturen over de jaren 1965-1973 verzameld:

jaar	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
De Bilt	13.7	14.2	15.3	14.1	18.1	15.7	17.2	17.2	17.1
Eelde	13.4	14.1	14.9	14.1	17.5	15.1	17.0	17.1	16.7

- Toets de nul hypothese dat geen verschil in temperatuur bestaat bij onbetrouwbaarheidsdrempel 5% door het bepalen van een overschrijdingskans.
 - Bepaal een numeriek betrouwbaarheidsinterval voor het verschil $\mu - \nu$ in temperatuur, met betrouwbaarheid 0.95.
 - Welke statistisch model gebruikt u u bij a) en b)? Geef een volledige (maar korte) beschrijving.
4. (**Alleen Deeltentamen.**) Een politieke partij behaalde bij de laatste verkiezingen 25 % van de stemmen. Door middel van een opiniepeiling willen we nagaan of dit percentage is gestegen. We toetsen daartoe de nulhypothese $H_0: p \leq 0.25$ op basis van het percentage aanhangers van de partij in een steekproef ter grootte n met teruglegging. Hoe groot moeten we n minimaal kiezen (bij benadering) om een fout van de eerste soort van ten hoogste 5% en een onderscheidend vermogen in $p = 0.30$ van ten minste 95% te bewerkstelligen?

5. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{0 \leq x \leq \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$. Laat $U = \max(X_1, \dots, X_n)$.

- Maak een schets van de aannemelijkheidsfunctie en bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
 - Bepaal een kansdichtheid voor U .
 - Geef de algemene definitie van een pivot.
 - Laat zien dat U/θ een pivot is.
 - Geef aan hoe een 95 % betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op U kan worden bepaald.
6. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2\theta \log x}{x} e^{-\theta(\log x)^2} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. De waarneming is de vector $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0: \theta = \theta_0$.
- Geef een formule voor een benaderend (voor n groot) betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de likelihood ratio statistiek.
- Bepaal de waargenomen informatie voor θ (als functie van X).
- Geef een formule voor een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.

Normering:

1a: 2	2a: 3	3a: 3	4: 9	5a: 3	6a: 3
1b: 1	2b: 3	3b: 3		5b: 1	6b: 2
1c: 2	2c: 3	3c: 3		5c: 2	6c: 2
1d: 2				5d: 1	6d: 2
1e: 2				5e: 2	

Eindcijfer deeltentamen = totaal/4+1

Eindcijfer volledig tentamen = totaal/5+1