

1.

a. De log likelihood functie is

$$\lambda \mapsto \log \prod_{i=1}^n p_{k,\lambda}(X_i) = -n \log \Gamma(k) + nk \log \lambda + (k-1) \log \prod_{i=1}^n X_i - \lambda \sum_{i=1}^n X_i.$$

Deze functie is continu op $(0, \infty)$ en divergeert naar $-\infty$ als $\lambda \downarrow 0$ of $\lambda \uparrow \infty$. De afgeleide is $nk/\lambda - \sum_{i=1}^n X_i$ en heeft een uniek nulpunt voor $\lambda = nk/\sum_{i=1}^n X_i$. Dit nulpunt geeft dus een uniek punt of maximum in de likelihood en is derhalve de meest aannemelijke schatter.

b. We lossen $\hat{k}$ en $\hat{\lambda}$ op uit de vergelijkingen

$$\bar{X} = \frac{\hat{k}}{\hat{\lambda}}, \quad \overline{X^2} = \frac{\hat{k}}{\hat{\lambda}^2} + \left(\frac{\hat{k}}{\hat{\lambda}}\right)^2.$$

Dit geeft $\hat{\lambda} = \bar{X}/(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)$ en $\hat{k} = (\bar{X})^2/(\overline{X^2} - (\bar{X})^2)$. Dit zijn de momementenschatters.

2.

a. De a-posteriori dichtheid is proportioneel aan de functie

$$\theta \mapsto \prod_{i=1}^n p_{\theta}(X_i) \pi(\theta),$$

voor π de a-priori dichtheid. Invullen geeft dat deze functie gelijk is

$$\theta \mapsto \left(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n X_i^2} \frac{1}{\Gamma(10)} \theta^9 e^{-\theta}.$$

Dit is proportioneel aan de functie

$$\theta \mapsto \theta^{n/2+9} e^{-\theta(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1)}.$$

We herkennen hierin de vorm van de Gamma dichtheid met parameters $n/2 + 10$ en $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1$.

b. De Bayes schatter voor θ is de verwachting van de a-posteriori verdeling. Volgens de rekenregel van som 1 is dit

$$\frac{n/2 + 10}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1}.$$

3.

a. De aannemelijkheidsfunctie is gelijk aan

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_{\theta}(X_i) = 2^n \prod_{i=1}^n X_i \frac{1}{\theta^{2n}} 1_{X_{(n)} \leq \theta}.$$

We laten de schets hier achterwege. Deze laat echter een plaatje zien met θ op de horizontale as en een functie die 0 is voor $\theta < X_{(n)} = U$ en positief en dalend is voor $\theta \geq U$. Dus de aannemelijke schatter is U .

b. Voor $u > 0$

$$P_{\theta}(U \leq u) = P_{\theta}(X_1 \leq u)^n = \left(\int_0^u \frac{2x}{\theta^2} dx \right)^n = \frac{u^{2n}}{\theta^{2n}}.$$

Een kansdichtheid voor U is de $p_{\theta}^U(u) = 2nu^{2n-1}/\theta^{2n} 1_{0 < u < \theta}$.

c.

$$E_{\theta}U = \int_0^{\theta} up_{\theta}^U(u) du = \frac{2n}{2n+1}\theta.$$

$$E_{\theta}V = (3/2)E_{\theta}X_1 = \frac{3}{2} \int_0^{\theta} xp_{\theta}(x) dx = \theta.$$

We concluderen dat V een zuivere schatter voor θ is, en U is niet zuiver.

d. We geven de voorkeur aan de schatter met de kleinste verwachte kwadratische afwijking.

Dit is de som van de variantie en de onzuiverheid in het kwadraat.

$$\text{MSE}(\theta; V) = \text{var}_{\theta} V = \frac{1}{n} \frac{9}{4} \text{var}_{\theta} X_1 = \frac{9}{4n} \left(\frac{2}{4}\theta^2 - \left(\frac{2}{3}\theta \right)^2 \right) = \frac{\theta^2}{8n}.$$

$$E_{\theta}U^2 = \int_0^{\theta} u^2 p_{\theta}^U(u) du = \frac{n}{n+1}\theta^2.$$

$$\text{var}_{\theta} U = \frac{n}{n+1}\theta^2 - \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^2 \theta^2 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2} \theta^2.$$

$$\text{MSE}(\theta; U) = \text{var}_{\theta} U + \left(\frac{2n}{2n+1}\theta - \theta \right)^2 = \text{var}_{\theta} U + \frac{\theta^2}{(2n+1)^2}.$$

We concluderen dat $\text{MSE}(U; \theta)/\text{MSE}(V; \theta) = O(1/n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, zodat U de voorkeur verdient, in ieder geval voor voldoende grote waarden voor n . (Een preciezer antwoord wordt niet gevraagd.)