



1.

a. De likelihood functie wordt gegeven door

$$\theta \mapsto \prod_{i=1}^n p_{\theta}(X_i) = 2^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^n X_i \right) e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

De partiële afgeleide naar θ van de logaritme van deze functie is gelijk aan

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Dit is gelijk aan 0 voor $\hat{\theta} = 1/\bar{X}_n^2$. De tweede afgeleide in dit nulpunt is gelijk aan $-n/\hat{\theta}^2$ en is negatief. Derhalve is $\hat{\theta}$ een punt van maximum.b. We lossen de vergelijking $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\theta} = \bar{X}_n$ op naar θ . Dit levert de momentenschatting $\pi/(4(\bar{X}_n)^2)$.c. In de Bayesiaanse notatie is de simultane dichtheid van $(X_1, \dots, X_n, \bar{\Theta})$ gelijk aan

$$(x_1, \dots, x_n, \theta) \mapsto \prod_{i=1}^n p_{\theta}(x_i) \theta e^{-\theta} = 2^n \theta^{n+1} \prod_{i=1}^n x_i e^{-\theta(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1)}.$$

De a-posteriori dichtheid is proportioneel aan deze functie als functie van θ voor vaste $x_1, \dots, x_n$. We herkennen hierin de dichtheid van de Gamma verdeling met parameters $n+2$ en $1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$.d. De Bayes schatting is de verwachting van de a-posteriori verdeling en dus de verwachting van deze Gamma verdeling: $(n+2)/(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)$. Voor de schatter vervangen we de realisaties x_i door de grootheden X_i . Een alternatief is de directe berekening

$$\frac{\int_0^\infty \theta \prod_{i=1}^n p_{\theta}(X_i) \theta e^{-\theta} d\theta}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n p_{\theta}(X_i) \theta e^{-\theta} d\theta} = \frac{\int_0^\infty \theta 2^n \theta^{n+1} \prod_{i=1}^n X_i e^{-\theta(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1)} d\theta}{\int_0^\infty 2^n \theta^{n+1} \prod_{i=1}^n X_i e^{-\theta(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1)} d\theta} = \frac{n+2}{1 + \sum_{i=1}^n X_i^2},$$

met tweemaal gebruikmaking van de in de opgave gegeven identiteit (met $k-1$ gelijk aan $n+2$ en $n+1$, en $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^n X_i^2$).

2.

a. De aannemelijkheidsfunctie is gelijk aan

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_{\theta}(X_i) = 3^n \prod_{i=1}^n X_i^2 \frac{1}{\theta^{3n}} 1_{X_{(n)} \leq \theta}.$$

De schets laat een plaatje zien met θ op de horizontale as en een functie die 0 is voor $\theta < X_{(n)} = U$ en positief en dalend is voor $\theta \geq U$. Dus de aannemelijke schatter is U .b. Voor $0 < u, \theta$

$$P_{\theta}(U \leq u) = P_{\theta}(X_1 \leq u)^n = \left(\int_0^u \frac{3x^2}{\theta^3} dx \right)^n = \frac{u^{3n}}{\theta^{3n}}.$$

Een kansdichtheid voor U is de afgeleide $p_{\theta}^U(u) = 3nu^{3n-1}/\theta^{3n} 1_{0 < u < \theta}$.

c.

$$E_{\theta} U = \int_0^{\theta} u p_{\theta}^U(u) du = \frac{3n}{3n+1} \theta.$$

$$E_{\theta} V = (4/3) E_{\theta} X_1 = \frac{4}{3} \int_0^{\theta} x p_{\theta}(x) dx = \theta.$$

We concluderen dat V een zuivere schatter voor θ is, en U is niet zuiver.

- d. We geven de voorkeur aan de schatter met de kleinste verwachte kwadratische afwijking. Dit is de som van de variantie en de onzuiverheid in het kwadraat.

$$\text{MSE}(\theta; V) = \text{var}_\theta V = \frac{1}{n} \frac{16}{9} \text{var}_\theta X_1 = \frac{16}{9n} \left(\frac{3}{5} \theta^2 - \left(\frac{3}{4} \theta \right)^2 \right) = \frac{\theta^2}{15n}.$$

$$\mathbb{E}_\theta U^2 = \int_0^\theta u^2 p_\theta^U(u) du = \frac{3n}{3n+2} \theta^2.$$

$$\text{var}_\theta U = \frac{3n}{3n+2} \theta^2 - \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^2 \theta^2 = \frac{3n}{(3n+2)(3n+1)^2} \theta^2.$$

$$\text{MSE}(\theta; U) = \text{var}_\theta U + \left(\frac{3n}{3n+1} \theta - \theta \right)^2 = \text{var}_\theta U + \frac{\theta^2}{(3n+1)^2}.$$

We concluderen dat $\text{MSE}(U; \theta) / \text{MSE}(V; \theta) = O(1/n) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, zodat U de voorkeur verdient, in ieder geval voor voldoende grote waarden voor n . (Een preciezer antwoord wordt niet gevraagd.)

3.

- De waarneming X is binomiaal verdeeld met parameters $n = 1000$ en θ , waarbij de parameter θ onbekend is met $\theta \in [0, 1]$.
- De algemene vorm van het interval is $X/n \pm z_{0.05} \sqrt{(X/n)(1-X/n)/n}$, voor z_α het rechter α -kwantiel van de standaard normale verdeling. Dit wordt in dit geval $[0.3252, 0.3748]$.
- De waarde $1/3$ ligt in het betrouwbaarheidsinterval. De nul hypothese $H_0: \theta = 1/3$ wordt daarom niet verworpen.

4.

- a. De log aannemelijkheidsfunctie is

$$\theta \mapsto \log \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i) = n \log 3 + n \log \theta + \sum_{i=1}^n \log(X_i^2) - \theta \sum_{i=1}^n X_i^3.$$

De partiële afgeleide naar θ wordt gegeven door $1/\theta - \sum_{i=1}^n X_i^3$ en is gelijk aan nul dan en slechts dan als $\theta = (\overline{X^3})^{-1}$. De aannemelijkheidsfunctie is een continue functie die naar $-\infty$ daalt als $\theta \downarrow 0$ of als $\theta \uparrow \infty$. Het enige stationaire punt is $\hat{\theta} = (\overline{X^3})^{-1}$. Dit is dus een punt van globaal maximum, en derhalve de meest aannemelijke schatter.

- De score functie is $\dot{\ell}_\theta(x) = 1/\theta - x^3$, en dus $\ddot{\ell}_\theta(x) = -1/\theta^2$. De waargenomen informatie voor θ is derhalve $-\sum_{i=1}^n \ddot{\ell}_{\hat{\theta}}(X_i) = 1/\hat{\theta}^2 = \overline{X^3}^2$.
- Een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter is $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} (1/\sqrt{n \hat{\theta}}) = 1/\overline{X^3} \pm z_{\alpha/2} n^{-1/2} (\overline{X^3})^{3/2}$.
- De log likelihood ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0: \theta = \theta_0$ is

$$\log \frac{\prod_{i=1}^n p_{\hat{\theta}}(X_i)}{\prod_{i=1}^n p_{\theta_0}(X_i)} = n \log \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - (\hat{\theta} - \theta_0) \sum_{i=1}^n X_i^3.$$

- De likelihood ratio toets verwerpt als 2 maal de log likelihood ratio statistiek groter is dan $\chi_{1,\alpha}^2$, het rechter α -punt van de chikwadraat verdeling met 1 vrijheidsgraad. Een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ is

$$\left\{ \theta_0 : 2n \log \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} - 2(\hat{\theta} - \theta_0) \sum_{i=1}^n X_i^3 \leq \chi_{1,\alpha}^2 \right\}.$$