

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. U heeft de beschikking over een tabellenboekje.

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Er volgt dat $E_\theta X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/\theta}$. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- Bepaal de momentenschatter voor θ .
- Bepaal de dichtheid van de a-posteriori verdeling voor θ relatief ten opzichte van de a-priori verdeling met kansdichtheid $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} 1_{\theta>0}$. Van welke standaard kansverdeling is dit de dichtheid, en met welke parameter(s)? (U mag bij deze opgave gebruikmaken van de gelijkheid

$$\int_0^\infty \lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s} ds = (k-1)!,$$

geldig voor $k \in \mathbb{N}$ en $\lambda > 0$.)

- Bepaal de Bayes schatter voor θ behorend bij de a-priori verdeling van c).

2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{3x^2}{\theta^3} 1_{0 \leq x \leq \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Laat $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ en $V = (4/3)\bar{X}_n$. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Maak een schets van de aannemelijkheidsfunctie en bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
 - Bepaal een kansdichtheid voor U .
 - Welke van de schatters U en/of V is zuiver voor θ ?
 - Aan welke van de schatters U en V voor θ geeft u de voorkeur? Om rekenwerk te besparen is het voldoende deze vraag te beantwoorden voor (willekeurig) grote n (dwz. $n \rightarrow \infty$).
 - Geef aan hoe een 95 % betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op U kan worden bepaald.
3. De opiniepeiler Maurice wilde weten welke fractie θ van alle Nederlanders voor de oorlog tegen Irak was. Hij belde daarom 1000 willekeurige mensen op (gekozen met teruglegging uit de Nederlandse bevolking) en vroeg of ze voorstander waren. Zij X het aantal ondervraagden dat de vraag bevestigend beantwoordde.
- Beschrijf een geschikt statistisch model voor deze situatie.
 - Stel dat 350 mensen de vraag bevestigend beantwoordden. Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ , met onbetrouwbaarheid 0.05.
 - Gebruik het antwoord op vraag b) voor het toetsen van de nulhypothese dat $1/3$ van de bevolking voorstander van de oorlog was.