



N.B. Dit is een tentamen over de gehele stof van Algemene Statistiek, niet het tweede deeltentamen.

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. U heeft de beschikking over een tabellenboekje.

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \binom{2}{x} \frac{\theta^x (1-\theta)^{2-x}}{\theta(2-\theta)}, \quad x \in \{1, 2\}.$$

Hierin is $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ (in het geval dat $1 < \bar{X} < 2$).
 - Laat zien dat $E_\theta X_1 = 2/(2-\theta)$.
 - Bepaal de momentenschatter voor θ .
 - Bepaal de dichtheid van de a-posteriori verdeling voor θ relatief ten opzichte van de a-priori verdeling met kansdichtheid $\pi(\theta) = c(\alpha, \beta) \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} (2-\theta)^n 1_{0 < \theta < 1}$, voor α en β positieve constanten en $c(\alpha, \beta)$ een normeringsconstante. U mag hierbij gebruiken dat $\theta \mapsto B(\alpha, \beta) \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} 1_{0 < \theta < 1}$ de kansdichtheid van de Beta-verdeling is.
 - Bepaal de Bayes schatter voor θ behorend bij de a-priori verdeling van d). U mag hierbij gebruiken dat $B(\alpha+1, \beta) = \alpha/(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta)$ voor alle $\alpha, \beta > 0$.
2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{0 \leq x \leq \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Laat $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ en $V = (3/2)\bar{X}_n$. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Maak een schets van de aannemelijkheidsfunctie en bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
 - Bepaal een kansdichtheid voor U .
 - Welke van de schatters U en/of V is zuiver voor θ ?
 - Aan welke van de schatters U en V voor θ geeft u de voorkeur? Om rekenwerk te besparen is het voldoende deze vraag te beantwoorden voor (willekeurig) grote n (dwz. $n \rightarrow \infty$).
3. Ter vergelijking van de juli-temperaturen in De Bilt en Eelde zijn bij het KNMI de gemiddelde juli-temperaturen over de jaren 1965-1973 verzameld:

jaar	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
De Bilt	13.7	14.2	15.3	14.1	18.1	15.7	17.2	17.2	17.1
Eelde	13.4	14.1	14.9	14.1	17.5	15.1	17.0	17.1	16.7

- Toets de nul hypothese dat geen verschil in temperatuur bestaat bij onbetrouwbaarheidsdrempel 5% door het bepalen van een overschrijdingskans.
- Bepaal een numeriek betrouwbaarheidsinterval voor het verschil $\mu - \nu$ in temperatuur, met betrouwbaarheid 0.95.
- Welke statistisch model gebruikt u u bij a) en b)? Geef een volledige (maar korte) beschrijving.
- Kan men uit het betrouwbaarheidsinterval van b) concluderen, dat de doorsnee juli-temperatuur in De Bilt hoger is dan in Eelde? Beargumenteer uw antwoord.

4. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = (2x + 1)\theta e^{-(x^2+x)\theta} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Hieruit kan men afleiden dat $P_\theta(X_i^2 + X_i > z) = e^{-\theta z}$ voor $z > 0$, en bovendien dat de grootheid $2\sum_{i=1}^n (X_i^2 + X_i)$ een chikwadraat verdeling met $2n$ vrijheidsgraden bezit als $\theta = 1$. De waarneming is de vector $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- Geef de algemene definitie van een pivot.
- Laat zien dat $2\theta\sum_{i=1}^n (X_i^2 + X_i)$ een pivot is.
- Bepaal een formule voor een betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de pivot uit b) uitgedrukt in kwantielen van de chikwadraat verdeling.
- Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van de nulhypothese $H_0: \theta = \theta_0$.
- Geef een formule voor een benaderend (voor n groot) betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de likelihood ratio statistiek.
- Bepaal de waargenomen informatie voor θ (als functie van X).
- Geef een formule voor een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.

Normering:

1a: 2	2a: 3	3a: 3	4a: 2
1b: 1	2b: 2	3b: 3	4b: 2
1c: 2	2c: 2	3c: 3	4c: 2
1d: 2	2d: 3	3d: 2	4d: 2
1e: 3			4e: 2
			4f: 2
			4g: 2

Eindcijfer = totaal/5+1