

1.

- a. De likelihood functie wordt gegeven door

$$\theta \mapsto \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) = 2^n \theta^n \left(\prod_{i=1}^n X_i \right) e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

De partiële afgeleide naar θ van de logaritme van deze functie is gelijk aan

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Dit is gelijk aan 0 voor $\hat{\theta} = 1/\bar{X}_n^2$. De tweede afgeleide in dit nulpunt is gelijk aan $-n/\hat{\theta}^2$ en is negatief. Derhalve is $\hat{\theta}$ een punt van maximum.

- b. We lossen de vergelijking $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\theta} = \bar{X}_n$ op naar θ . Dit levert de momentenschatting $\pi/(4(\bar{X}_n)^2)$.
- c. In de Bayesiaanse notatie is de simultane dichtheid van $(X_1, \dots, X_n, \bar{\theta})$ gelijk aan

$$(x_1, \dots, x_n, \theta) \mapsto \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) e^{-\theta} = 2^n \theta^n \prod_{i=1}^n x_i e^{-\theta(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1)}.$$

De a-posteriori dichtheid is proportioneel aan deze functie als functie van θ voor vaste $x_1, \dots, x_n$. We herkennen hierin de dichtheid van de Gamma verdeling met parameters $n+1$ en $1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$. De Bayes schatting is de verwachting van de a-posteriori verdeling en dus de verwachting van deze Gamma verdeling: $(n+1)/(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)$. Voor de schatter vervangen we de realisaties x_i door de grootheden X_i . Een alternatief is de directe berekening

$$\frac{\int_0^{\infty} \theta \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) e^{-\theta} d\theta}{\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i) e^{-\theta} d\theta} = \frac{\int_0^{\infty} \theta 2^n \theta^n \prod_{i=1}^n X_i e^{-\theta(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1)} d\theta}{\int_0^{\infty} 2^n \theta^n \prod_{i=1}^n X_i e^{-\theta(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1)} d\theta} = \frac{n+1}{1 + \sum_{i=1}^n X_i^2},$$

met tweemaal gebruikmaking van de in de opgave gegeven identiteit (met $k-1$ gelijk aan $n+1$ en n , en $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^n X_i^2$).

- d. Zie het antwoord onder c).

2.

- a. De grootheid X is homogeen verdeeld, en derhalve $E_{\theta}X = \theta/2$ en $\text{var}_{\theta}X = \theta^2/12$. We berekenen $E_{\theta}Y = \int_0^{\theta} 2y^2/\theta dy = (2/3)\theta$, en op dezelfde manier $E_{\theta}Y^2 = \theta^2/2$, zodat $\text{var}_{\theta}Y = \theta^2/18$.
- b. Er geldt dat $E_{\theta}S = \frac{1}{2}E_{\theta}X + E_{\theta}Y = (11/12)\theta$, en op dezelfde manier $E_{\theta}T = \theta$. De schatter S is niet zuiver voor het schatten van θ . De schatter T is zuiver.
- c. De verwachte kwadratische fout (mean square error) is de som van variantie en het kwadraat van de onzuiverheid. Gebruikmakend van de onafhankelijkheid van X en Y zijn de varianties van S en T gemakkelijk te berekenen, en we vinden

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\theta; S) &= \frac{1}{4} \text{var}_{\theta}X + \text{var}_{\theta}Y + \left(1 - \frac{11}{12}\right)^2 \theta^2 = \frac{1}{12} \theta^2, \\ \text{MSE}(\theta; T) &= \frac{4}{9} \text{var}_{\theta}X + \text{var}_{\theta}Y + 0^2 = \frac{5}{54} \theta^2. \end{aligned}$$

- d. Omdat
- $\theta^2/12 < (5/54)\theta^2$
- voor iedere
- $\theta > 0$
- geven we de voorkeur aan de schatter
- S
- .

3. Er geldt dat $P(Z \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z)$, vanwege onafhankelijkheid van X en Y . Met gebruikmaking van de exponentiële verdelingen wordt dit $(1 - e^{-z})(1 - e^{-z})$ voor $z \geq 0$ en 0 voor $z \leq 0$. Dit is een nette continu differentieerbare functie van $z \in \mathbb{R}$. De grootheid Z is daarom continue verdeeld met als dichtheid de afgeleide van deze functie, gegeven door

$$z \mapsto 2e^{-z}(1 - e^{-z})1_{z>0}.$$