

Beargumenteer uw antwoorden.

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en continu verdeeld met kansdichtheid

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Er volgt dat $E_{\theta} X_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\theta}$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- Bepaal de momentenschatter voor θ .
- Bepaal de Bayes schatter voor θ ten opzichte van de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = e^{-\theta} 1_{\theta>0}$.
(U mag bij deze opgave gebruikmaken van de gelijkheid

$$\int_0^{\infty} \lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s} ds = (k-1)!,$$

geldig voor $k \in \mathbb{N}$ en $\lambda > 0$.)

- De a-posteriori verdeling behorend bij de a-priori dichtheid onder c) is een standaard verdeling. Welke, en met welke parameters?
2. Gegeven zijn twee onafhankelijke waarnemingen X en Y met kansdichtheden f_{θ} en g_{θ} , respectievelijk, gegeven door

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta} 1_{0 < x < \theta}, \quad g_{\theta}(y) = \frac{2y}{\theta^2} 1_{0 < y < \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Als schatters voor θ beschouwen we

$$S = \frac{1}{2}X + Y, \quad \text{en} \quad T = \frac{2}{3}X + Y.$$

- Bepaal verwachting en variantie van X , en van Y .
 - Welk van de schatters S of T is zuiver voor θ ?
 - Bepaal de verwachte kwadratische fout (mean square error) van S en van T .
 - Aan welk van de twee schatters, S of T , geeft u de voorkeur? Licht uw antwoord toe.
3. De stochastische grootheden X en Y zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met verwachting 1.
- Bepaal de kansdichtheid van $Z = \max(X, Y)$.

Normering: Alle 9 vraagstukken 1 punt + 1 punt gratis.

1. De stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld volgens de Gamma verdeling met parameters k en λ . Iedere X_i bezit dus kansdichtheid

$$p_{k,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

waarin $\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de Gamma functie is. (De vorm van deze functie is irrelevant voor de volgende vragen.) De verwachting en variantie van een Gamma verdeling met parameters k en λ zijn gelijk aan, respectievelijk, k/λ en k/λ^2 . De waarneming is de vector $(X_1, \dots, X_n)$.

- Veronderstel dat k bekend is en λ een onbekende, positieve parameter. Bepaal de meest aannemelijke schatter voor λ .
 - Veronderstel dat k en λ allebei onbekende, positieve parameters zijn. Bepaal de momentenschatter voor (k, λ) .
2. De stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots, X_n$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

De parameter $\theta > 0$ is onbekend. De waarneming is de vector $(X_1, \dots, X_n)$. We beschouwen Bayesiaanse inferentie met de a-priori kansverdeling gelijk aan de Gamma verdeling met parameters 10 en 1. (Formules voor de dichtheid en verwachting van de Gamma verdeling worden gegeven in de vorige som.)

- Bepaal de a-posteriori verdeling. Welke standaard verdeling is dit?
 - Bepaal de Bayes schatter voor θ . (U hoeft geen integralen te evalueren!)
3. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{0 \leq x \leq \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Laat $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ en $V = (3/2)\bar{X}_n$. De waarneming is de vector $(X_1, \dots, X_n)$.

- Maak een schets van de aannemelijkheidsfunctie en bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- Bepaal een kansdichtheid voor U .
- Welke van de schatters U en/of V is zuiver voor θ ?
- Aan welke van de schatters U en V voor θ geeft u de voorkeur? Om rekenwerk te besparen is het voldoende deze vraag te beantwoorden voor (willekeurig) grote n (dwz. $n \rightarrow \infty$).

Normering:

De eerste 7 sommen allemaal 1 punt; som 3d 2 punten.

Het eindcijfer is gelijk aan het totaal aantal punten +1.